ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

# ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

## ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ, ΑΘΗΝΑ 2022

Πράξη «Αναβάθμιση των Προγραμμάτων Σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» - MIS: 5035542

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

**Γνωστικό Πεδίο: Φυσικές Επιστήμες, Τεχνολογία και Μαθηματικά**
**Γνωστικό Αντικείμενο/επίπεδο εκπαίδευσης: Μαθηματικά (Δημοτικό)**

## Εμπειρογνώμονες Εκπόνησης του Προγράμματος Σπουδών

Εμπειρογνώμονες Εκπόνησης του Προγράμματος Σπουδών
**Επόπτης**
Σακονίδης Χαράλαμπος

**Εκπονητές/Εκπονήτριες**
Κασσώτη Όλγα, Καφούση Σουλτάνα, Κλιάπης Πέτρος, Κλώθου Άννα, Λάτση Μαρία, Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος

**Εισηγητική Επιτροπή**
Ζυμπίδης Δημήτριος, Στουραΐτης Κωνσταντίνος, Τάσος Νικόλαος

**Υπεύθυνη Γνωστικού Πεδίου**
Πετροπούλου Γεωργία


| | |
|---|---|
| **Επιχειρησιακό Πρόγραμμα «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση 2014 -2020»** | |
| | |
| | **ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**<br>Ιωάννης Αντωνίου, Πρόεδρος ΙΕΠ |
| | |
| Πράξη με τίτλο: | Πράξη «Αναβάθμιση των Προγραμμάτων Σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» - MIS: 5035542 |
| | |
| Επιστημονική Ομάδα Έργου: | Αφεντουλίδου Άννα, Σύμβουλος Β΄ ΙΕΠ, Εμβαλωτής Αναστάσιος, Μέλος ΔΣ ΙΕΠ, Κατσαγάνη Γεωργία, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Μαστραπάς Αντώνιος, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Ματσούκας Παναγιώτης, Σύμβουλος Β΄ ΙΕΠ, Μπίλλα Πολυξένη, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Πετροπούλου Γεωργία, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Πήλιουρας Παναγιώτης, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Σαλπασαράνης Κωνσταντίνος, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Σταμούλης Ευθύμιος, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Στυλιάρης Ευστάθιος, Προϊστάμενος Γραφείου Στρατηγικής και Πολιτικού Σχεδιασμού ΙΕΠ |
| | |
| Υπεύθυνος Πράξης: | Παναγιώτης Πήλιουρας, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ |
| | |
| Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους. | |

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού
Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Προτεινόμενη αναφορά στο υλικό:

Σακονίδης, Χ., Κασσώτη, Ό., Καφούση, Σ., Κλιάπης, Π., Κλώθου, Ά., Λάτση, Μ., Τριανταφυλλίδης, Τ. (2022*). Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Δημοτικού*. *2η Έκδοση* Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Περιεχόμενα

# Α. ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

**1. Εισαγωγή**

Ο Οδηγός στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού προκειμένου να κατανοήσει τον προσανατολισμό του νέου ΠΣ, να αναγνωρίσει τις αλλαγές που αφορούν στο περιεχόμενο, το μαθησιακό περιβάλλον και τις διδακτικές προσεγγίσεις που αυτό εισάγει και να υποστηρίξει την αξιοποίησή τους στην τάξη. Δεν επιδιώκει να προσφέρει 'συνταγές' για το πώς να δράσει κάθε εκπαιδευτικός στην τάξη του, καθώς θεωρείται πως απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς με επαρκή επιστημονική κατάρτιση και επαγγελματική ετοιμότητα, ικανούς να σχεδιάζουν τη διδασκαλία τους και να λαμβάνουν αποφάσεις για την εξέλιξή της, με βάση τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα και τις ιδιαίτερες συνθήκες της τάξης τους.

Στο πλαίσιο του νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ), ο εκπαιδευτικός αναμένεται να είναι σε θέση να υποστηρίζει αποτελεσματικά όλους τους μαθητές να προσεγγίσουν τις μαθηματικές γνώσεις, να αναπτύξουν τη μαθηματική σκέψη και να αναγνωρίσουν τις αξίες της μαθηματικής επιστήμης που το Πρόγραμμα Σπουδών προτάσσει. Ο Οδηγός φιλοδοξεί να προσφέρει κεντρικές αλλά συγκεκριμένες κατευθύνσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών, με σεβασμό στους βαθμούς ελευθερίας που επιβάλλουν τόσο η αναγνώριση της πολυπλοκότητάς της, όσο και η αναγνώριση της επιστημονικής συγκρότησης του εκπαιδευτικού και της μοναδικότητας του ρόλου του ως ειδικού που διδάσκει και διδάσκεται στην τάξη καθημερινά. Ειδικότερα, επιδιώκει να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να:

- αναγνωρίζει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε διδακτική ενότητα και να τα συνδέει με αυτά που οι μαθητές αναμένεται να έχουν επιτύχει στις προηγούμενες τάξεις ή θα επιτύχουν στις επόμενες,
- καθορίζει με τη βοήθεια του ΠΣ τους στόχους του και τα μέσα επίτευξής τους ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών,
- επιλέγει και να αναπτύσσει εκπαιδευτικό υλικό, έχοντας επίγνωση των διδακτικών του αποφάσεων και επίδρασης που αυτές μπορεί να έχουν στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών,
- σχεδιάζει τη διδασκαλία του αξιοποιώντας έργα και διδακτικά εργαλεία με τρόπους που αναδεικνύουν τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας,
- πειραματίζεται με νέες διδακτικές προσεγγίσεις που επιτρέπουν την πολύτροπη επίτευξη των διδακτικών του στόχων, αναγνωρίζοντας τα γνωστικά, τα κοινωνικο-πολιτισμικά αλλά και τα κοινωνικο-πολιτικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής εκπαίδευσης,
- σχεδιάζει εργαλεία αξιολόγησης της επίτευξης των στόχων του για την ανατροφοδότηση και διαμόρφωση της μάθησης και της διδασκαλίας.

Ο Οδηγός περιλαμβάνει ένα *Γενικό μέρος,* στο οποίο παρουσιάζονται βασικές αρχές της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών με βάση τα σύγχρονα βιβλιογραφικά δεδομένα, αναλύεται η έννοια της μαθηματικής δραστηριότητας, περιγράφονται παραδείγματα πόρων και εργαλείων για τη μάθηση και διδασκαλία, καθώς και παραδείγματα εργαλείων αξιολόγησης που ανταποκρίνονται στις βασικές αρχές αξιολόγησης που θέτει το ΠΣ. Επίσης, περιλαμβάνει ένα *Ειδικό μέρος* στο οποίο, για κάθε θεματικό πεδίο, παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της σημασίας του πεδίου και της ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και των δυσκολιών των μαθητών που αφορούν στο πεδίο. Επιπρόσθετα, προσφέρονται ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες διδακτικής διαχείρισης (ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη), τα οποία συνδέονται με συγκεκριμένα σημεία της εξελικτικής πορείας ανάπτυξης ενός ΠΜΑ και ενίοτε μιας συγκεκριμένης Τροχιάς Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ). Τέλος, προτείνονται πόροι που μπορεί να αξιοποιηθούν για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη της διδακτικής πράξης.

## 2. **Μαθηματικό Περιεχόμενο**

Η πρώτη αναγκαία συνθήκη για να μπορεί ο εκπαιδευτικός να μετασχηματίζει την επιστημονική μαθηματική γνώση σε μαθηματική γνώση κατάλληλη για τους μαθητές (σχολική μαθηματική γνώση) είναι η βαθιά γνώση του μαθηματικού περιεχομένου του Προγράμματος Σπουδών. Η γνώση αυτή θα τον ενδυναμώσει ώστε να επιλέξει κατάλληλες μαθηματικές πρακτικές (π.χ. δημιουργία συνδέσεων, οπτικοποίηση, κλπ) και εύστοχα μαθηματικά έργα και να υποστηρίξει την ανάπτυξη γνήσιων μαθηματικών δραστηριοτήτων στην τάξη (Henningsen & Stein, 1997; Stein & Kim, 2009), οι οποίες θα αναδείξουν και καλλιεργήσουν **Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών.** Ως 'μεγάλη ιδέα' νοείται μια κεντρική έννοια ή διεργασία της μαθηματικής επιστήμης, η οποία συνδέει διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο (NCTM, 2000, σ. 17).

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών ως κατεξοχήν Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών αναγνωρίζονται η **Μαθηματική δομή,** η **Απόδειξη,** η **Γενίκευση,** η **Μεταβολή,** η **Ισοδυναμία,** οι **Μετασχηματισμοί** και η **Προσέγγιση-σύγκλιση**.

**Η Μαθηματική δομή** αφορά τον προσδιορισμό γενικών ιδιοτήτων ενός συνόλου, οι οποίες εμφανίζονται ως σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων στοιχείων του συνόλου. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμοί, τρίγωνα, εξισώσεις, σύνολα με σχέσεις μεταξύ τους, ή και σχέσεις σχέσεων. Για παράδειγμα, η αναγνώριση της δομικής μονάδας δημιουργίας μιας κανονικότητας είναι σημαντική για την εύρεση του κανόνα της, όπως συμβαίνει στην ακολουθία των περιττών αριθμών.

**Η Απόδειξη** αφορά τη συλλογιστική διαδικασία, η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και, μέσα από μια σειρά διαδοχικών επιχειρημάτων/συλλογισμών, οδηγεί σε ένα συμπέρασμα. Η απόδειξη στο Δημοτικό Σχολείο έχει περισσότερο εμπειρικό και διαισθητικό χαρακτήρα, ενώ στο Γυμνάσιο και πολύ περισσότερο στο Λύκειο οι μαθητές καλούνται να εμβαθύνουν προοδευτικά στη διατύπωση εικασιών και στην επαλήθευση ή απόρριψή τους με αυστηρά μαθηματικές διαδικασίες.

Μία επιθυμητή πορεία προς την απόδειξη περιλαμβάνει διαδικασίες διερεύνησης, την διατύπωση εικασιών, τη διαισθητική ή άτυπη αιτιολόγηση, την ανάπτυξη συλλογισμών και τέλος την τυπική απόδειξη (Hanna & de Villiers, 2012). Έτσι, στο Δημοτικό Σχολείο, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το άθροισμα των γωνιών επαρκούς εύρους ειδών τριγώνων με διάφορους πρακτικούς(π.χ. κόβοντας και τοποθετώντας τις γωνίες την μια δίπλα στην άλλη) ή συμβατικούς (π.χ. μετρώντας τις γωνίες με μοιρογνωμόνιο ή σε ψηφιακό περιβάλλον) τρόπους και να οδηγηθούν στην ‘εμπειρική και διαισθητική’ διαπίστωση ότι είναι $180^{o}$.

Κατά την αποδεικτική διαδικασία ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να χρησιμοποιεί ένα γενικό παράδειγμα (generic example), πολλαπλές αναπαραστάσεις (οπτικοποίηση, πίνακες τιμών, κλπ) και ενδεχομένως χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία για να υποβοηθήσει τους μαθητές στην εύρεση της απόδειξης (Mariotti, 2000). Έτσι, για την απόδειξη σχέσεων, όπως $\alpha(\beta\pm\gamma)=\alpha\beta\pm\alpha\gamma$ ή τύπων εμβαδών, όπως του τριγώνου $E=\frac{1}{2}\beta\upsilon$, χρειάζεται να προηγηθούν σχετικά παραδείγματα της μορφής $2\times(5-3)=2\times5-2\times3=\ldots$ ή $4\times(\frac{3}{4}+1)=4\times\frac{3}{4}+4\times1=\ldots$κ.ά. ή η διερεύνηση της αντίστοιχης σχέσης με ή χωρίς λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας αντιστοίχως.

**Η Γενίκευση** αφορά στην επέκταση ιδιοτήτων των στοιχείων ενός συνόλου στα στοιχεία ενός ευρύτερου συνόλου. Η γενίκευση επιτρέπει στους μαθητές την επέκταση εννοιών ή διεργασιών τις οποίες ήδη έχουν κατανοήσει ή την διατύπωση εικασιών που ενίοτε αποτελούν προ-στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας. Η διατύπωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας των φυσικών αριθμών αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα γενίκευσης στο Δημοτικό Σχολείο. Αργότερα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η βασική ιδιότητα των τετραγωνικών ριζών $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, μπορεί εύκολα να γενικευθεί στη σχέση $\sqrt{\alpha_1\cdots}$ $\sqrt{\phantom{x}}\cdots\sqrt{\phantom{x}}$, για κατάλληλες υπόριζες ποσότητες. Επιπλέον, η γενίκευση αξιοποιείται από τους μαθητές και σε ερωτήματα με πιο έντονη μαθηματική πρόκληση, όπως η συμπλήρωση των παρακάτω ισοτήτων:

$$1+2=\frac{2\cdot3}{2}$$

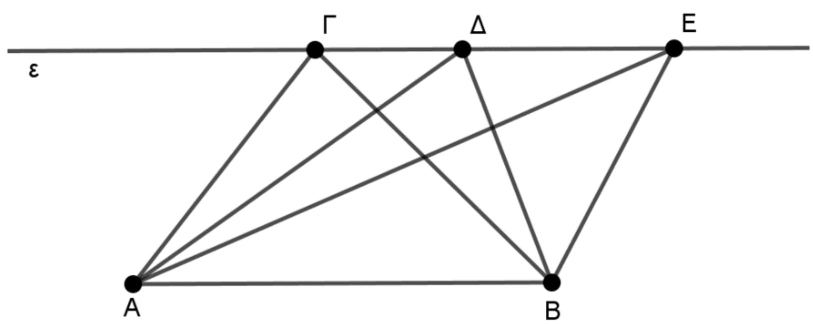
$$1+2+3=\frac{3\cdot4}{2}$$

$$\ldots=\ldots$$

που οδηγεί στην εικασία $1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$ , για $\nu\in N^{*}$, η οποία συνήθως ακολουθείται από την αποδεικτική μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

**Η Μεταβολή** συνδέεται με την αλλαγή ενός μεγέθους. Οι μεταβολές αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα του περιβάλλοντος και της ζωής μας γενικότερα. Η διερεύνηση και η μοντελοποίηση αυτών των αλλαγών αποτελεί κεντρική δραστηριότητα στο πεδίο της Άλγεβρας και των Στοχαστικών Μαθηματικών. Η μεταβολή εμφανίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, με την αναγνώριση και διερεύνηση σχέσεων μεταξύ μεγεθών και αναπτύσσεται στις τελευταίες τάξεις με τη μελέτη ειδικών περιπτώσεων συμμεταβολής, όπως είναι τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο η έννοια της μεταβολής μορφοποιείται στην Άλγεβρα με γραμμικές ή μη-γραμμικές συναρτήσεις, καθώς και με την έννοια του ρυθμού μεταβολής στα μαθηματικά των τελευταίων τάξεων. Η αξιοποίηση της έννοιας της μεταβολής στην τάξη προτείνεται να συνδέεται με πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα που να ενδιαφέρουν τους μαθητές, προερχόμενα από διαφορετικά πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητας. Στα Στοχαστικά Μαθηματικά, η μεταβολή αποκτά μια πιο γενική μορφή, καθώς δεν μπορεί κανείς να υπολογίσει πώς ακριβώς μεταβάλλεται ένα μέγεθος, όταν μεταβάλλεται κάποιο άλλο. Μπορούμε όμως να ποσοτικοποιήσουμε χαρακτηριστικά της συμμεταβολής με τις έννοιες της συν-διακύμανσης και του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης. Με βάση τις τιμές αυτών των δεικτών διερευνάται η προσαρμογή ενός στατιστικού μοντέλου (π.χ. ευθεία παλινδρόμησης) στα δεδομένα, ώστε να μπορούμε να διατυπώσουμε πώς αναμένουμε να ανταποκριθεί μια μεταβλητή στις μεταβολές μιας άλλης. Επιπλέον, στη Στατιστική, η ιδέα της **μεταβλητότητας** συνδέεται με την ποικιλία και το εύρος των δεδομένων που αφορούν σε φαινόμενα, καταστάσεις και ποσότητες του καθημερινού κόσμου. Η ιδέα της μεταβλητότητας συνδέεται με εκείνη της αβεβαιότητας, που βρίσκεται στο επίκεντρο των Πιθανοτήτων, μέσω της διατύπωσης προβλέψεων με σκοπό τη λήψη αποφάσεων.

**Η ισοδυναμία** αφορά την αμφίδρομη συσχέτιση δύο μαθηματικών αντικειμένων**.** Η ισοδυναμία διατρέχει όλους τους κύκλους σπουδών στην Αριθμητική/Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Στην Αριθμητική/Άλγεβρα έχουμε την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων και των ισοδύναμων αλγεβρικών παραστάσεων, όπως είναι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις. Στην Γεωμετρία η ισοδυναμία εμφανίζεται στα ισεμβαδικά σχήματα, όπως για παράδειγμα τα τρίγωνα που έχουν ίδια βάση και η τρίτη κορυφή κινείται σε μια παράλληλη προς τη βάση ευθεία (Σχήμα 1).




**Σχήμα 1.** Η ευθεία ε είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, επομένως τα τρίγωνα ΓΑΒ, ΔΑΒ και ΕΑΒ είναι ισοδύναμα.

**Οι Μετασχηματισμοί** αφορούν τη διαδικασία με την οποία μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμοί ή συναρτησιακές σχέσεις ή γεωμετρικά σχήματα, μπορούν να μετατραπούν σε μία διαφορετική μορφή μέσω μαθηματικής επεξεργασίας. Οι Μετασχηματισμοί συναντώνται στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα, ένας κλασσικός μετασχηματισμός είναι η απλοποίηση μιας αριθμητικής (π.χ. 12=4.3=2.2.3) ή μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. $\frac{x^2-1}{x+1}+1=x$, για κάθε $x \neq -1$). Στη Γεωμετρία η ομοιότητα τριγώνων, για παράδειγμα, είναι ένας μετασχηματισμός ο οποίος διαθέτει αμετάβλητα και μεταβλητά στοιχεία του μαθηματικού αντικειμένου (τριγώνου) που υπόκειται στον μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός της ομοιότητας διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες των τριγώνων, ενώ μεταβάλλονται με βάση το λόγο ομοιότητας τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των τριγώνων.

**Η προσέγγιση-σύγκλιση** συνδέεται με άπειρες διαδικασίες και την έννοια του ορίου στην Ανάλυση. Ξεκινάει από το Δημοτικό Σχολείο, όπου εμφανίζεται η προσέγγιση εκατοστού, χιλιοστού κ.λ.π., συνεχίζεται αργότερα στο Γυμνάσιο και στη γενική παιδεία στο Λύκειο μελετάται η προσέγγιση ενός άρρητου με έναν ρητό αριθμό (π.χ. ο **π**). Οι προσεγγίσεις αυτές είναι στατικές και έχουν ένα συγκεκριμένο σφάλμα. Η έννοια της προσέγγισης ολοκληρώνεται στα μαθήματα προσανατολισμού με τη σύγκλιση, όπου η προσέγγιση αποκτά δυναμικό χαρακτήρα (οσοδήποτε κοντά).

3. **Μαθηματικές και Κοινωνικο-πολιτισμικές διεργασίες/πρακτικές**

Βασική επιδίωξη του νέου ΠΣ των Μαθηματικών είναι η υποστήριξη της εμπλοκής όλων των μαθητών σε κρίσιμες διεργασίες κατανόησης και ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και σκέψης.Οι διεργασίες αυτές διέπουν και χαρακτηρίζουν το 'μαθηματικό γίγνεσθαι' και το 'μαθηματικώς πράττειν' και, κατά συνέπεια, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο 'μαθηματικώς μανθάνειν και διδάσκειν'. Διακρίνονται στις **αμιγώς μαθηματικές πρακτικές**, που συνδέονται με τις πρακτικές και τους λόγους (discourses) ανάπτυξης της επιστήμης των μαθηματικών και τις **κοινωνικο-πολιτισμικο-συναισθηματικές πρακτικές**, που χαρακτηρίζουν τις πρακτικές και τους λόγους συμμετοχής των ατόμων σε αυτήν την ανάπτυξη.

Στην ενότητα αυτήν παρουσιάζονται οι πρακτικές των δυο παραπάνω ομάδων σε μια προσπάθεια σαφούς οριοθέτησης του περιεχομένου και της λειτουργικότητάς τους στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη στα μαθηματικά. Καθεμιά τους έχει μια μοναδική εστίαση, αλλά, ταυτόχρονα αλληλοεπιδρά με τις άλλες, όταν τίθεται σε λειτουργία.

**(2α).** *Μαθηματικές διεργασίες και Μαθηματικές πρακτικές*: Οι αμιγώς μαθηματικές πρακτικές περιλαμβάνουν την δημιουργία συνδέσεων, τον συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, τη μαθηματική επικοινωνία, την οπτικοποίηση, την επιλογή και τη χρήση εργαλείων, την επίλυση προβλήματος, τη μοντελοποίηση και τη γνωστική ενημερότητα και παρουσιάζονται στη συνέχεια.

(i) <u>Δημιουργία συνδέσεων</u>: Η πρακτική της δημιουργίας συνδέσεων αφορά στην παροχή ευκαιριών στους μαθητές να συνειδητοποιούν:

α) Σχέσεις μεταξύ διαφόρων μαθηματικών εννοιών, αναπαραστάσεων και διαδικασιών, καθώς και των διαφορετικών μαθηματικών πεδίων (γεωμετρία, άλγεβρα, στοχαστικά μαθηματικά). Για παράδειγμα, τα παιδιά μπορεί να συζητήσουν τη σχέση ανάμεσα στο κλάσμα 1⁄4, τον δεκαδικό 0.25, και το ποσοστό 25%, να ερμηνεύουν γεωμετρικά μια αλγεβρική παράσταση (π.χ. της Ιχ+2Ι ως απόσταση) ή να συνδέουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (γεωμετρία) με τους πίνακες (άλγεβρα) .

β) Σχέσεις των μαθηματικών με την καθημερινότητα και με άλλες επιστήμες. Ο εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να εντάσσει στη διδασκαλία του τη χρήση πλαισίων από την καθημερινότητα που έχουν νόημα για τα παιδιά (π.χ. αυθεντικά προβλήματα, παιχνίδια, μοντέλα λειτουργίας καθημερινών καταστάσεων), αλλά και πλαίσια που αναδεικνύουν τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα (π.χ. φυσικές επιστήμες, λογοτεχνία, φυσική αγωγή).

(ii) Συλλογισμός & επιχειρηματολογία: Η ανάπτυξη συλλογισμού και επιχειρηματολογίας διευκολύνεται όταν οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τον τρόπο λύσης που προτείνουν σε ένα μαθηματικό ερώτημα. Η αξιολόγηση των επιχειρημάτων που αναπτύσσουν τα ίδια τα παιδιά αλλά και οι συμμαθητές τους, η δικαιολόγηση ενός αποτελέσματος που δημιουργεί έκπληξη, η ανάλυση και σύγκριση διαφορετικών τρόπων επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, η διατύπωση ερωτημάτων και εικασιών, η παρουσίαση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, η κατασκευή μιας απόδειξης, η γενίκευση μιας ιδέας από συγκεκριμένα παραδείγματα και η εξαγωγή συμπερασμάτων αποτελούν κρίσιμα στοιχεία της ανάπτυξης της συγκεκριμένης πρακτικής. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να παρουσιάζουν τον τρόπο λύσης τους, να επιχειρηματολογούν γι’ αυτόν ανεξάρτητα από την ορθότητα του αποτελέσματος, να εξηγούν πως σκέφτηκαν ή να αναπτύσσουν επιχειρήματα για να πείσουν ένα συμμαθητή τους ότι έχει κάνει λάθος.

(iii) Μαθηματική επικοινωνία: Η επικοινωνία σχετίζεται με την ικανότητα των μαθητών να μοιράζονται τις σκέψεις τους, τις ερωτήσεις τους, τις ιδέες τους και τις λύσεις τους χρησιμοποιώντας τον προφορικό λόγο, τη γραπτή συμβολική γλώσσα των μαθηματικών αλλά και μη λεκτικές μορφές επικοινωνίας. Η μετάφραση της φυσικής γλώσσας σε συμβολική γλώσσα και αντίστροφα και η έμφαση στην ακρίβεια της μαθηματικής γλώσσας βοηθά την επικοινωνία μεταξύ των μελών της τάξης. Για παράδειγμα, η σωστή χρήση του συμβόλου της ισότητας, η επιλογή των μονάδων μέτρησης, η απόδοση τίτλων σε στατιστικά διαγράμματα, η διατύπωση ορισμών. Οι μαθητές κατά την επικοινωνία τους στις ομάδες εργασίας και στην ολομέλεια της τάξης μπορούν να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο σκέψης τους και τον τρόπο σκέψης των συνομιλητών τους, να αναθεωρήσουν τις στρατηγικές τους, να οδηγηθούν στην αποσαφήνιση των ιδεών και την ανάλυση των επιχειρημάτων που ανταλλάσσονται και να προχωρήσουν σε βαθύτερη κατανόηση εννοιών και διαδικασιών. Όταν ο εκπαιδευτικός παροτρύνει τα παιδιά να συμμετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία επικοινωνώντας τη σκέψη τους, τα αποτελέσματα στην κατανόηση των μαθηματικών είναι πολύ θετικά (Ing et al., 2015).

(iv) Οπτικοποίηση: Η πρακτική της οπτικοποίησης συνδέεται με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων που ο μαθητής μπορεί να αξιοποιήσει στην επίλυση προβλήματος καθώς και για να επικοινωνήσει τη σκέψη του. Για παράδειγμα, όταν τα παιδιά στις μικρές ηλικίες κατασκευάζουν ένα εικονόγραμμα και ένα ραβδόγραμμα με βάση ένα πίνακα δεδομένων, τους δίνεται η δυνατότητα να συνδέσουν και να συγκρίνουν διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των δεδομένων και να τους αξιολογήσουν ως προς την προσφορά τους. Επίσης, η χρήση της αριθμογραμμής είναι ένα κατάλληλο αναπαραστατικό εργαλείο για υπολογισμούς και ανάδειξη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, ενώ η χρήση και κατασκευή χαρτών βοηθούν την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης των μαθητών.

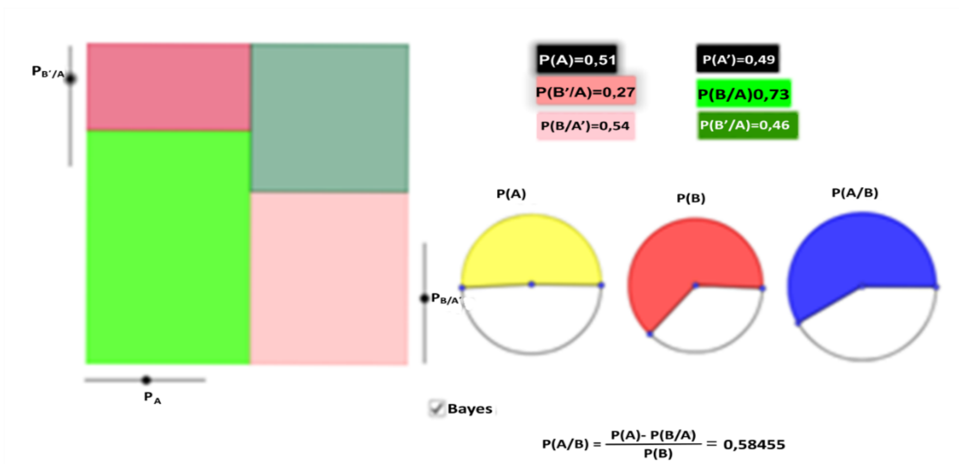
(v) Επιλογή και χρήση εργαλείων: Τα παιδιά ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν ποικιλία χειραπτικών, τυπικών και ψηφιακών εργαλείων. Τα χειραπτικά εργαλεία που δίνουν τη δυνατότητα στα παιδιά να συνδέσουν την άτυπη με την τυπική γνώση, μπορεί να είναι καθημερινά αντικείμενα από το περιβάλλον των μαθητών (π.χ. μολύβια, χαρτόνι), ή πολιτισμικά εργαλεία και τεχνουργήματα (π.χ. νομίσματα, ζυγαριά), ή εξειδικευμένα εργαλεία (π.χ. αριθμητήριο). Η χρήση τους μπορεί να διαφέρει ως προς τη μαθηματική δράση που υποστηρίζουν. Για παράδειγμα, το χειραπτικό υλικό μπορεί να είναι ένα μοντέλο αναπαράστασης μιας διαδικασίας (π.χ. το μοντέλο της ζυγαριάς), ένα μέσο διερεύνησης μιας σχέσης (π.χ. οι γεωπίνακες για τη διερεύνηση της σχέσης εμβαδού και περιμέτρου), ή ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία για σχεδιασμό, κατασκευή, σύγκριση γεωμετρικών αντικειμένων (διαβήτης, όργανα μέτρησης).

Αντίστοιχα, τα ψηφιακά εργαλεία διαθέτουν χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη μαθηματική δραστηριότητα και την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων, όπως:

(α) Δυνατότητες διερεύνησης και πειραματισμού. Για παράδειγμα, το μοντέλο της χαλασμένης αριθμομηχανής, το μοντέλο του άβακα και το μοντέλο ενός παντογράφου επιτρέπουν την ανάπτυξη διερευνητικών έργων και τον πειραματισμό.

(β) Δυνατότητες δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra, επιτρέπει στους μαθητές να ασχοληθούν με γεωμετρικές κατασκευές και να τις χειριστούν με δυναμικό τρόπο στο περιβάλλον, π.χ. να σύρουν σημεία, να αυξομειώσουν το μέγεθος ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών, να παρατηρήσουν μεταβολές και να διατυπώσουν εικασίες.

(γ) Αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις: οι μεταβολές σε μια αναπαράσταση επιφέρουν αυτομάτως μεταβολές και στις υπόλοιπες διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, στην παρακάτω εφαρμογή η αλλαγή των τιμών των πιθανοτήτων P(A),P(B΄|A) καιP(B|A΄) μέσω δυναμικού χειρισμού επιφέρει αλλαγές τόσο στις «πίτες» των πιθανοτήτων P(A), P(B) κα ιP(A|B), όσο και στο τετράγωνο των συμπληρωματικών ενδεχομένων.




δ) Πολλαπλές δυνατότητες έκφρασης μαθηματικών νοημάτων. Για παράδειγμα, μπορεί να αξιοποιηθεί η γλώσσα προγραμματισμού Logo στο πλαίσιο περιβαλλόντων Γεωμετρίας της Χελώνας για την ανάπτυξη παραμετρικών ή μη διαδικασιών, με στόχο την κατασκευή και διερεύνηση γεωμετρικών σχημάτων.

Καθώς τα έργα μετασχηματίζονται σε δραστηριότητα από τους συμμετέχοντες στην τάξη των μαθηματικών, τα εργαλεία μπορούν να στηρίξουν τη δημόσια παρουσίαση εικασιών και επιχειρημάτων από τους μαθητές (Bussi, 2011). Η αξιοποίηση ποικιλίας εργαλείων για το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο και η συζήτηση πάνω στις ομοιότητες και τις διαφορές τους μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες, τις διαδικασίες και τις αναπαραστάσεις τους.

(vi) Επίλυση προβλήματος: Η επίλυση προβλήματος συνδέεται με τη συμμετοχή των μαθητών σε ένα έργο που δεν γνωρίζουν εκ των προτέρων τον τρόπο λύσης του, διαφορετικά το έργο αφορά μια εφαρμογή ή άσκηση (NCTM, 2000). Επομένως, είναι σημαντικό να έχουν την ευκαιρία να προτείνουν τις δικές τους λύσεις σε νέες προβληματικές καταστάσεις, αλλά και σε προβλήματα που έχουν διατυπώσει οι ίδιοι. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να ενθαρρύνουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών για την επίλυση ενός προβλήματος, όπως για παράδειγμα να το αναπαραστήσουν με υλικά, να χρησιμοποιήσουν ένα πίνακα με τις πληροφορίες του προβλήματος, να αναδιατυπώσουν το πρόβλημα, να το απλοποιήσουν, να κάνουν μια υπόθεση, να εργαστούν αντίστροφα (Fan & Zhu, 2007). Η διατύπωση νέων προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές τούς δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες που προσεγγίζουν, αξιοποιώντας δημιουργικά διαφορετικά πλαίσια από τον κόσμο των εμπειριών τους (English, 1997; Cai & Leikin, 2020).

(vii) Μοντελοποίηση: Η μαθηματική μοντελοποίηση προσφέρει τη δυνατότητα σύνδεσης της πραγματικής ζωής με τα μαθηματικά. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέγει έργα από την καθημερινότητα του μαθητή, την κοινωνία και τον χώρο εργασίας και να βοηθά στη 'μετάφρασή' τους στη γλώσσα των μαθηματικών (π.χ. η κατασκευή μιας εξίσωσης για την επίλυση ενός καθημερινού προβλήματος, η επιλογή ενός δειγματικού χώρου και η απόδοση πιθανοτήτων στα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, η χρήση της γεωμετρίας σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού). Η μοντελοποίηση περιλαμβάνει τόσο τη διαδικασία της αποπλαισίωσης μιας κατάστασης με σκοπό την συμβολική αναπαράστασή της και τον χειρισμό των συμβόλων, όσο και την αναφορά στην αρχική κατάσταση για την ερμηνεία των συμβόλων και των αποτελεσμάτων (επανα-πλαισίωση). Για παράδειγμα, στις συνθετικές εργασίες, οι μαθητές καλούνται οι ίδιοι να διαμορφώσουν, να διερευνήσουν και να αξιολογήσουν μαθηματικά μοντέλα με τη χρήση χειραπτικών ή/και ψηφιακών εργαλείων.

(viii) Μεταγνωστική ενημερότητα: Οι μαθητές αναπτύσσουν μεταγνωστική ενημερότητα όταν θέτουν ερωτήματα στον εαυτό τους όπως: Τι κάνω; Γιατί το κάνω; Πώς με βοηθάει αυτό; Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν τους μαθητές να αναπτύξουν μεταγνωστικές ικανότητες όταν ενισχύουν το 'σκέφτομαι φωναχτά' κατά τη λύση ενός προβλήματος και προσφέρουν ευκαιρίες αναστοχασμού σε ένα πρόβλημα με ερωτήματα όπως: Γιατί χρησιμοποίησες αυτόν τον τρόπο; Το σκέφτηκες πρώτα με άλλο τρόπο; Έχεις λύσει κάποιο παρόμοιο πρόβλημα;

**(2β).** Κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές: Οι *κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές* ενέχουν ταυτόχρονα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης, όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος (discourse), η συμπερίληψη, η μαθηματική ταυτότητα μάθησης και ο μαθηματικός γραμματισμός και αφορούν σε δεξιότητες και ικανότητες των μαθητών όπως:

- να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά,
- να αναπτύσσουν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις,
- να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση
- να κατανοούν τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού, καθώς και την αξία της για την ανθρώπινη δραστηριότητα διαχρονικά
- να είναι μαθηματικά εγγράμματοι, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά, αλλά και να επεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά. Ένα "μαθηματικά εγγράμματο" άτομο αντιλαμβάνεται ότι οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν επινοηθεί για τη μελέτη φαινομένων του περιβάλλοντος και την επίλυση προβλημάτων. Διαθέτει, επιπλέον, την ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο- και εξω-μαθηματικών καταστάσεων, στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο.

Οι *κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές* αφορούν σε νόρμες αναγνώρισης και διαχείρισης συναισθημάτων και συμπεριφορών, διαμόρφωσης και διατήρησης θετικών σχέσεων και λήψης υπεύθυνων αποφάσεων. Υποστηρίζουν τους μαθητές στη μελέτη των μαθηματικών, καθώς συντελούν στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης, της κριτικής σκέψης και, εν τέλει, στην ανάπτυξη θετικής ταυτότητας μάθησης των μαθηματικών. Ειδικότερα, μέσω των κοινωνικο-συναισθηματικών νορμών οι μαθητές:

- αναπτύσσουν θετικά κίνητρα, αυτοπεποίθηση, εστίαση στις θετικές πτυχές των εμπειριών, υπομονή και επιμονή στην αντιμετώπιση οποιασδήποτε μαθηματικής κατάστασης,
- εκτιμούν την ομορφιά και την κομψότητα των μαθηματικών,
- αναπτύσσουν πνεύμα περιέργειας και αγάπη για τα μαθηματικά,
- αναπτύσσουν και ασκούν δεξιότητες που υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων σεβόμενοι την διαφορετικότητα στη σκέψη και έκφραση,
- αξιοποιούν δεξιότητες αξιολόγησης, ελέγχου και αυτογνωστικής ρύθμισης της προόδου τους προκειμένου να οικοδομήσουν ισχυρές ταυτότητες μαθητευομένων των μαθηματικών,
- αναγνωρίζουν και διαχειρίζονται διαφορετικού τύπου, ποιότητας και έντασης συναισθήματα και το άγχος με τρόπο αποτελεσματικό για τους ίδιους και τη μάθηση,

Οι κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές που αναφέρονται στο ΠΣ προωθούνται όταν οι εκπαιδευτικοί:

- διατηρούν υψηλές προσδοκίες για όλους τους μαθητές,

- βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν θετικές στάσεις για τα μαθηματικά, ενισχύοντας τον ενθουσιασμό τους κατά την ενασχόλησή τους με αυτά,
- επιλέγουν έργα στα οποία μπορούν να εμπλακούν όλοι οι μαθητές,
- υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης των μαθητών καλλιεργώντας την πεποίθηση ότι όλοι μπορούν να τα καταφέρουν μέσω της προσπάθειας,
- εμπλέκουν όλους τους μαθητές στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και μαθηματικής επικοινωνίας,
- αναδεικνύουν τη σημασία των Μαθηματικών στη λήψη ορθολογικών αποφάσεων ακόμα και σε συνθήκες αβεβαιότητας,
- παροτρύνουν τους μαθητές να επιμένουν στην επίλυση ενός προβλήματος,
- βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν τη χρήση των μαθηματικών στην καθημερινότητά τους και το ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον τους,
- διευκολύνουν τη συνεργασία σε ομάδες, αναπτύσσοντας συνήθειες όπως: να ακούν και να προσπαθούν να κατανοούν τις εξηγήσεις των συμμαθητών τους, να συζητούν τις διαφωνίες τους στην ομάδα, να καταλήγουν σε κοινά αποδεκτές λύσεις.

## 4. Μαθηματικά έργα και μαθηματική δραστηριότητα: επιλογή/σχεδιασμός & διαχείριση στην τάξη

**Μαθηματικό έργο και μαθηματική δραστηριότητα:** Το μαθηματικό έργο αφορά στην εργασία που αναθέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά τις δράσεις που αναλαμβάνουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να φέρουν σε πέρας ένα έργο που τους έχει ανατεθεί. Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι ή μια άσκηση ή ένα πρόβλημα ή ακόμα και μια ερώτηση που θα θέσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη και έχει ως στόχο να προκαλέσει μαθηματική δραστηριότητα. Αν και ένα έργο προορίζεται να προκαλέσει συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα, πρέπει να γίνει διάκριση ανάμεσα: α) στο μαθηματικό έργο, όπως αυτό σχεδιάστηκε αρχικά, β) στο μαθηματικό έργο, όπως παρουσιάστηκε από τον εκπαιδευτικό μέσα στην τάξη, γ) στο μαθηματικό έργο, ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ των μαθητών, δ) στο μαθηματικό έργο, όπως αυτό τελικά διαμορφώθηκε ως συνισταμένη των δράσεων εκπαιδευτικών και μαθητών στο πλαίσιο της σχολικής τάξης (Margolinas, 2013, Caleja, 2013). Ένα μαθηματικό έργο συνδέεται με συγκεκριμένα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα, και στοχεύει όχι μόνο στην ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών γνώσεων, αλλά και στην καλλιέργεια μαθηματικών διεργασιών (π.χ. οπτικοποίηση, μοντελοποίηση κλπ.) και κοινωνικο-πολιτισμικών και κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών (π.χ. σύνδεση των μαθηματικών με τον πολιτισμό) (Schoenfeld, 2020).

**Επιλογή/σχεδιασμός:** Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που θα επιλέξει ή θα σχεδιάσει ένα μαθηματικό έργο ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών του και, στη συνέχεια, θα το διαφοροποιήσει κατά τη διδασκαλία, με βάση την εξέλιξή της, στο πλαίσιο μιας κυκλικής διαδικασίας σχεδιασμού/τροποποίησης – εφαρμογής στην τάξη – αξιολόγησης του μαθηματικού έργου. Ένα έργο μπορεί να οδηγήσει σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα,όταν προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να μαθητεύσουν σε μια ποικιλία μαθηματικών πρακτικών και να μυηθούν στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών (όπως η απόδειξη και η γενίκευση ή η ισοδυναμία και οι μετασχηματισμοί) (Τζεκάκη, 2015).

Βασικό κριτήριο για την επιλογή/τροποποίηση ή το σχεδιασμό εξαρχής ενός μαθηματικού έργου είναι οι μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές που επιδιώκεται να αναπτύξει ο μαθητής. Τα μαθηματικά έργα είναι σημαντικό να βρίσκονται κοντά στα ενδιαφέροντα ή/και τις εμπειρίες των μαθητών, να συνδέονται, όταν είναι δυνατό, με την ανθρώπινη δράση και δραστηριότητα, να τους εμπλέκουν στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού (Artigue, 2012). Ταυτόχρονα, να θέτουν μαθηματικές προκλήσεις αλλά και να βρίσκονται εντός των δυνατοτήτων των μαθητών. Οι μαθητές χρειάζεται, δηλαδή, να διαθέτουν τα εργαλεία και την πρότερη γνώση, ώστε να εμπλακούν δημιουργικά σε ένα μαθηματικό έργο. Μαθηματικά έργα με κυμαινόμενο βαθμό δυσκολίας και ποικίλους τρόπους αντιμετώπισης προσφέρουν τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να εμπλακούν στη διεκπεραίωσή τους. Τέλος, μια ποικιλία πόρων (αναπαραστάσεις, μοντέλα, χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία κλπ.) μπορούν να αξιοποιηθούν στο πλαίσιο ενός μαθηματικού έργου, ώστε να μετασχηματιστούν από τους μαθητές σε εργαλεία διερεύνησης, συλλογισμού και επικοινωνίας των μαθηματικών εννοιών. Ο κατάλληλος σχεδιασμός και η κατάλληλη διδακτική διαχείριση των μαθηματικών έργων στην τάξη συντελούν καθοριστικά στο να μειωθεί η απόσταση μεταξύ των προθέσεων του εκπαιδευτικού και της μαθηματικής δραστηριότητας – και συνεπώς τη μάθησης - που τελικά αναπτύσσουν οι μαθητές (Ainley & Margolinas, 2013).

**Διδακτική διαχείριση:** Δύο σημεία φαίνεται να είναι καθοριστικά ως προς τη διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου:

- η έμφαση που δίνεται από την πλευρά του εκπαιδευτικού στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου,
- η δυνατότητα του εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει το διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη με όρους μαθηματικής διαπραγμάτευσης (Clarke & Mesiti, 2013).

Κατά την εφαρμογή ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη μπορούν να διακριθούν, σύμφωνα με τους Trevisan, Ribeiro, και da Ponte (2020 ) τρία στάδια: Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και να το συνδέσουν με τις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις. Παράλληλα, ενθαρρύνει τους μαθητές στην επιλογή και χρήση κατάλληλων πόρων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) (González & Eli, 2017).

Στο δεύτερο στάδιο της αυτόνομης εργασίας οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες και ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά μαζί τους. Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να έχει προβλέψει κατά το σχεδιασμό του μαθηματικού έργου πιθανές στρατηγικές των μαθητών και πιθανές παρανοήσεις και να έχει σκεφτεί τρόπους και μεθόδους για να τις αναγνωρίσει και να τις διαχειριστεί. Μπορεί να υποστηρίξει το διάλογο και τη συζήτηση στις ομάδες βοηθώντας τους μαθητές να αποσαφηνίσουν τις ιδέες τους με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα με διευκρινιστικές ερωτήσεις ή ζητώντας από ένα μαθητή να αναδιατυπώσει τις ιδέες ενός άλλου μαθητή της ομάδας του. Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στη συλλογιστική σκέψη των παιδιών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις όπως: «Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;», «Τι θα γινόταν αν…; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;» «Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;», «Υπάρχει άλλη απάντηση;», «Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;» κλπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης. Για παράδειγμα, μπορεί να απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις/υποδείξεις όπως: «Ποια είναι τα στοιχεία-κλειδιά τους προβλήματος;», «Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές πλην μιας σταθερές και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε τη ίδια διαδικασία για κάθε μεταβλητή» κλπ. (van de Walle et al., 2014).

Στο τρίτο στάδιο της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που προσεγγίστηκαν (Dooley, 2009; Stein et al., 2008), ενώ παράλληλα επικυρώνει και αξιολογεί τη μαθηματική γνώση των μαθητών (Morgan, 2000). Παρακολουθώντας την εξέλιξη των στρατηγικών των μαθητών σε όλα τα στάδια της ενασχόλησής τους με το μαθηματικό έργο, ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιολογήσει και την επίδραση του συγκεκριμένου έργου (Ainley & Margolinas, 2013) στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

## 5. Διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών

Οι διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας συνιστούν δυο κεντρικές συνιστώσες της εκπαιδευτικής πράξης που συνυφαίνονται στην τάξη και είναι σχεδόν αδύνατο να διαχωριστούν με σαφή τρόπο, έστω κι αν συχνά, για λόγους διαχείρισης και για να δώσουμε έμφαση στη μια ή στην άλλη από αυτές τις δυο συνιστώσες, τις διαχωρίζουμε ως να ήταν διακριτές. Η παρούσα ενότητα εστιάζει σε τρεις έννοιες που επιδιώκουν να συγκεκριμενοποιήσουν και να αναδείξουν όψεις της αλληλεπίδρασης των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών, έτσι όπως αυτές συνυφαίνονται στην τάξη.

**(4α). Η τροχιά μάθησης & διδασκαλίας**: Πρόκειται για περιγραφές της σκέψης και μάθησης ενός μαθητή σε μια συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή καθώς και την αντίστοιχη υποτιθέμενη διαδρομή που ακολουθείται μέσα από μια σειρά διδακτικών έργων, που σκοπό έχουν να ενεργοποιήσουν τα διαδοχικά στάδια ανάπτυξης. Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκεται να ανιχνευτεί και να υποβοηθηθεί η πορεία ανάπτυξης των σταδίων σκέψης ενός μαθητή επιτυγχάνοντας συγκεκριμένους στόχους (Clements & Sarama, 2004).

Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι δεξιότητες και ικανότητες του μαθητή ακολουθούν μια εξελικτική πορεία, η οποία επηρεάζεται από παράγοντες όπως το μαθησιακό περιβάλλον και η διδασκαλία και από υποκειμενικές συνιστώσες όπως η μαθηματική ωρίμανση, αλλά και οι προδιαθέσεις, οι στάσεις και τα ενδιαφέροντα. Με μια τροχιά καθίσταται εφικτό να χαρακτηριστούν τα στοιχεία που πλαισιώνουν μια πορεία μάθησης από ένα σημείο σε ένα άλλο, αλλά και να περιγραφούν οι κατάλληλες ενδεχομένως διδακτικές ενέργειες προκειμένου να διευκολυνθεί αυτή η μετάβαση. Οι ΤΜΔ επομένως είναι συνυφασμένες με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους ή μαθησιακά αποτελέσματα, καθώς και με τους τρόπους που οι μαθητές αναπτύσσουν τις προσδοκώμενες δεξιότητες και ικανότητες. Ο τρόπος αξιοποίησής τους είναι διττός:

- οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συγκεκριμένες σειρές από μαθηματικά έργα, προκειμένου να ενεργοποιήσουν τις νοητικές διεργασίες που οδηγούν προς την επιδιωκόμενη κατεύθυνση (ή χρησιμοποιούν ΠΣ και διδακτικά υλικά που έχουν σχεδιαστεί βασιζόμενα στην ίδια σειρά υποθέσεων).
- η σκέψη και μάθηση των μαθητών σε μια συγκεκριμένη περιοχή των Μαθηματικών διέρχεται μέσα από τα διαδοχικά επίπεδα που μπορεί να οδηγήσουν στο προτεινόμενο μαθησιακό αποτέλεσμα με την κατάλληλη διδακτική διαχείριση.

Στο *Ειδικό μέρος*του Οδηγού παρουσιάζονται παραδείγματα της εξελικτικής πορείας ανάπτυξης ορισμένων ΠΜΑ και ενίοτε ΤΜΔ. Έτσι, ο εκπαιδευτικός μπορεί να διευκολυνθεί στον σχεδιασμό της διδασκαλίας του και ειδικότερα:

- στην επισήμανση των κύριων στόχων που είναι αναγκαίο να επιτευχθούν
- στις αναγκαίες προηγούμενες γνώσεις που απαιτούνται
- στις συνδέσεις με επόμενες έννοιες και την κατοπινή εξέλιξη των εννοιών που διδάσκονται.

**(4β). Διδακτικές προσεγγίσεις/ στρατηγικές (teaching strategies)**: Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να επιτύχει την πραγμάτωση των στόχων ενός ΠΣ, είναι αναγκαίο να αναζητά και να αξιοποιεί ποικιλία πρακτικών και εργαλείων για την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος στη σχολική τάξη. Η επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης απαιτεί προσεκτική αναζήτηση, καθώς δεν υπάρχει μια γενική συνταγή για όλες τις περιπτώσεις. Όσο εγγύτερη στις ανάγκες των μαθητών είναι μια διδακτική πρακτική, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να οδηγήσει σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στην ενότητα αυτή συζητούνται διδακτικές προσεγγίσεις και προσανατολισμοί της διδακτικής πράξης που υποστηρίζονται από τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών.

**(i)** *Διδασκαλία βασισμένη στην έρευνα (Research based teaching)*: Ως διδασκαλία που βασίζεται στην έρευνα εννοούμε τη διδασκαλία η οποία σχεδιάζεται με βάση ευρήματα της έρευνας που αφορούν στη φύση της μαθηματικής σκέψης και μάθησης στη σχολική τάξη, καθώς και τις αντίστοιχες προτάσεις διδακτικής διαχείρισης. Ο διδακτικός σχεδιασμός του εκπαιδευτικού οφείλει να ανανεώνεται, να εμπλουτίζεται και να αναπροσαρμόζεται στα δεδομένα που αφορούν στις εκπαιδευτικές, τις γνωστικές και τις αναπτυξιακές παραμέτρους που φέρνει στο φως η έρευνα για τη μάθηση των μαθηματικών.

Μια άλλη παράμετρος που είναι σημαντικό να λαμβάνει υπόψη του ο διδακτικός σχεδιασμός είναι ο τρόπος ανάπτυξης των εννοιών, ώστε να είναι συμβατός με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών κάθε βαθμίδας: τις γνώσεις, τις εμπειρίες και το λεξιλόγιο που διαθέτουν για να εκφράσουν μαθηματικά τις ιδέες τους. Υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι η απομνημόνευση των μαθηματικών γνώσεων και η επικέντρωση στην διαδικαστική ευχέρεια δεν αρκεί για την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης. Στην κατεύθυνση αυτή, είναι σημαντική η ενθάρρυνση της δημιουργικότητας των μαθητών, η δημιουργία συνεργατικού-συμπεριληπτικού περιβάλλοντος, η δημιουργία μικρο-κοινοτήτων εξερεύνησης και συζήτησης στην τάξη.

**(ii)** *Διδασκαλία βασισμένη στη διερεύνηση (Inquiry based teaching)*: Η διδασκαλία που βασίζεται στη διερεύνηση προωθεί την οικοδόμηση του μαθηματικού νοήματος στη σχολική τάξη, με τον μαθητή στο ρόλο του ερευνητή, ο οποίος ανακαλύπτει, οργανώνει και συγκροτεί νέα γνώση. Η εννοιολογική μάθηση αποκτά προβάδισμα έναντι της μάθησης αλγοριθμικών διαδικασιών, ενώ παράλληλα υποστηρίζονται η ανάπτυξη και η εξέλιξη «συνηθειών του μυαλού» που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική σκέψη.

Σε μια τάξη διερεύνησης, οι γνωστικές συγκρούσεις που προκύπτουν, όταν οι μαθητές συνειδητοποιούν την ανεπάρκεια προηγούμενων γνώσεων, λειτουργούν ως μέσο ενεργής εμπλοκής των μαθητών με σκοπό την επανεξέταση της σκέψη τους, τη συζήτηση και αναζήτηση νέων οπτικών ή ιδεών.

Ο παρακάτω πίνακας περιγράφει ορισμένα χαρακτηριστικά μιας διερευνητικού τύπου διδακτικής προσέγγισης.

| **Χαρακτηριστικά μιας διδασκαλίας που υποστηρίζει την διερεύνηση** | |
|---|---|
| Ο εκπαιδευτικός… | |
| Παρουσιάζει πλούσια μαθηματικά έργα που εμπλέκουν με ενεργό τρόπο τους μαθητές σε διαδικασίες σκέψης που ενθαρρύνουν την ανάπτυξη συνδέσεων | Τα έργα που δίνονται<br>• είναι προσεγγίσιμα από όλους τους μαθητές<br>• περιλαμβάνουν προκλήσεις που είναι εφικτές<br>• αναπτύσσουν την κατανόηση και εκμάθηση διαδικασιών<br>• εμπεριέχουν ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών<br>• δίνουν έμφαση στην διαδικασία επίλυσης αντί για την απάντηση |
| Υποστηρίζει τη δημιουργία ενός συνεργατικού περιβάλλοντος που εμπλέκει τους μαθητές στην ανταλλαγή ιδεών, στην ανάπτυξη επιχειρημάτων, στην πρόκληση και στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων. | Η ατμόσφαιρα της τάξης<br>• υποστηρίζει τον διαμοιρασμό ιδεών και προσεγγίσεων<br>• αξιοποιεί διαφορετικές ιδέες και οπτικές<br>• προωθεί ανταλλαγή απόψεων και κριτική ανάλυση<br>• αναγνωρίζει ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν ο ένας από τον άλλο |
| Χρησιμοποιεί ερωτήσεις που προωθούν το συλλογισμό και κινητοποιούν τους μαθητές να επικοινωνούν με σαφήνεια τις μαθηματικές σκέψεις και τις ιδέες τους | Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού<br>• θέτουν μαθηματικές προκλήσεις στους μαθητές<br>• ενθαρρύνουν την αποτίμηση και ανάλυση των στρατηγικών<br>• αξιοποιούν παρανοήσεις των μαθητών για να στηρίξουν τη μαθησιακή διαδικασία<br>• προωθούν την εξερεύνηση εναλλακτικών στρατηγικών |
| Παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να αναλάβουν | Οι μαθητές<br>• θέτουν προβλήματα προς επίλυση |

| | |
|---|---|
| περισσότερες ευθύνες εκμάθησης και τους υποστηρίζει στην υλοποίηση των αποφάσεών τους | • διατυπώνουν ερωτήσεις και αναζητούν απαντήσεις<br>• σχεδιάζουν και ανακαλύπτουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων<br>• εκφράζουν τις ιδέες τους και τις αποτιμούν με κριτικό τρόπο |

(iii) *Διδασκαλία ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος (Teaching as problem solving)*: Ως διδασκαλία επίλυσης προβλήματος (problem solving) εννοούμε τη διδασκαλία που επικεντρώνεται στην επίλυση προβλήματος, μέσα από τρεις διακριτές πρακτικές (Schroeder & Lester, 1989):

α) τη διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος, που αφορά την εισαγωγή νέων εννοιών μέσω της ανάγκης επίλυσης προβληματικών καταστάσεων. Με αφετηρία ένα πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται με τα προηγούμενα εργαλεία, αναπτύσσονται νέες μαθηματικές τεχνικές και προσεγγίσεις. Η αναδιοργάνωση της γνώσης για την κατασκευή νέων μεθόδων και στρατηγικών οδηγεί στην ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου και τη ταυτόχρονη σύνδεση του με την προ υπάρχουσα γνώση. Έτσι, αναπτύσσεται μια σύνθετη κατανόηση που περιλαμβάνει την τυπική γνώση η οποία δομείται στη συνέχιση της διαισθητικής – εμπειρικής κατανόησης (Baroody, 2003, Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001). Για μια διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος είναι απαραίτητη η επιλογή κατάλληλων προβληματικών καταστάσεων που γεφυρώνουν παλιά και νέα γνώση, ώστε να αναδεικνύεται η ανάγκη υιοθέτησης νέων προσεγγίσεων.

β) τη διδασκαλία της επίλυσης, η οποία αφορά στη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να παρατηρούν οι ίδιοι την εξέλιξη της πορείας τους κατά την επίλυση (μέσα από μοντέλα επίλυσης, όπως του Polya). Η εστίαση βρίσκεται στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης που βασίζεται στην οπτική των Μαθηματικών ως ενός τρόπου σκέψης, αναζήτησης και εύρεσης μοτίβων για την επίλυση προβλημάτων. Ο στόχος σε μια τέτοια προσέγγιση είναι η απόκτηση ελέγχου από τους μαθητές πάνω στη διαχείριση προβληματικών καταστάσεων, με χρήση μεθόδων επίλυσης και ανάπτυξης της σκέψης τους. Μια διδασκαλία αυτού του τύπου περιλαμβάνει τη συζήτηση και ανάλυση κάθε συνιστώσας της διαδικασίας επίλυσης, την επισήμανση των ενεργειών των μαθητών, ενώ επιλύουν προβλήματα, καθώς και την υιοθέτηση μεταγνωστικού τύπου ελέγχου των βημάτων της επίλυσης και την ανάπτυξη στοιχείων αυτορρύθμισης.

γ) τη διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος, όπου η εστίαση βρίσκεται στους τρόπους με τους οποίους οι νέες γνώσεις μπορούν να αξιοποιηθούν για την επίλυση συνήθων ή μη-συνήθων προβλημάτων.

Η διδασκαλία μέσω της επίλυσης οδηγεί σε βελτίωση της απόδοσης των μαθητών, καθώς και στην ανάπτυξη θετικότερων στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά και τη χρησιμότητά τους (Harwell et al., 2007; Huntley et al., 2000; Riordan & Noyce, 2001; Schoenfeld, 2002; Thompson& Senk, 2001). Η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος μπορεί να ακολουθείται από διδασκαλία για την επίλυση, ώστε η νέα γνώση να εφαρμόζεται σε καινούργια πλαίσια (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001).

Σε κάθε περίπτωση διδασκαλίας προβλημάτων περιλαμβάνεται ο τονισμός στοιχείων που αποτελούν συνιστώσες κάθε είδους επίλυσης, όπως η προοδευτική εξέλιξη προς τον στόχο, η λειτουργική αξία του λάθους και η προσαρμοστικότητα της σκέψης.

**(4γ). Διδακτικές πρακτικές στην τάξη των μαθηματικών**: Η καθημερινή διδακτική πράξη διέπεται από 'νόρμες' εργασίας του εκπαιδευτικού, όπως είναι η διαχείριση του λάθους και η διαχείριση της μαθηματικής επικοινωνίας. Πρόκειται για πρακτικές διδακτικής διαχείρισης της μάθησης των μαθηματικών σε μικρο-επίπεδο, οι οποίες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές. Η παρούσα ενότητα εστιάζει αρχικά σε διδακτικές πρακτικές που στοχεύουν στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών, στην οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης και στην ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης. Ακολούθως προτάσσεται η συλλογική διάσταση της μαθηματικής δραστηριότητας που αναπτύσσεται στην τάξη. Προφανώς, οι δυο ομάδες διδακτικών πρακτικών αλληλεπιδρούν διαλεκτικά κατά την διάρκεια της εξέλιξης της διδασκαλίας.

**(i)** *Διδακτικές πρακτικές με έμφαση στη γνωστική διάσταση της εμπλοκής στη μάθηση των μαθηματικών: η περίπτωση της διαχείρισης του λάθους*: Η παιδαγωγική αξία **του λάθους** και η διδακτική του αξιοποίηση έχουν αναγνωριστεί στη βιβλιογραφία. Ειδικότερα, έχει βρεθεί ότι:

- Τα λάθη οδηγούν σε νέες ερωτήσεις και απορίες. Συχνά επιτρέπουν να αναδειχθούν νοήματα που δεν έχουν επαρκώς συγκροτηθεί από τους μαθητές.
- Τα λάθη επιτρέπουν μια βαθύτερη κατανόηση των παρανοήσεων που έχουν αναπτύξει οι μαθητές, με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να διαμορφώνει πληρέστερη αντίληψη των αδυναμιών τους.
- Η αναζήτηση του λάθους μετατοπίζει το βάρος από το αποτέλεσμα προς το συλλογισμό και τη μαθηματική επιχειρηματολογία. Έτσι, οι μαθητές διευκολύνονται στη σταδιακή ανάπτυξη ορθών μαθηματικών συλλογισμών.

Μια άλλη διδακτική πρακτική αφορά τη διδασκαλία με έμφαση στην **εννοιολογική κατανόηση** και όχι μόνο στην κατάκτηση διαδικαστικής γνώσης. Περιλαμβάνει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων, τη χρήση και σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων, την επισήμανση μαθηματικών σχέσεων μεταξύ αριθμών, παραστάσεων, σχέσεων, σχημάτων κλπ (Hiebert & Carpenter, 1992). Επιπλέον, η εννοιολογική κατανόηση περιλαμβάνει την επίγνωση της γνώσης που συγκροτείται στη βάση αυτής της κατανόησης (μεταγνώση). Η διδασκαλία είναι επιθυμητό να περιλαμβάνει την ανάπτυξη τόσο της εννοιολογικής όσο και της διαδικαστικής/ αλγοριθμικής κατανόησης που συμβάλλει στη σύνδεση της εννοιολογικής κατανόησης με τη συμβολική γλώσσα. Η εκμάθηση κανόνων και συμβόλων, χωρίς κατανόηση των εννοιών που βρίσκονται πίσω από αυτές, οδηγεί σε επιφανειακή κατανόηση που εύκολα μπορεί να ξεχαστεί αργότερα. Αντίθετα, η διδασκαλία με εννοιολογική εστίαση (όπως για παράδειγμα κατά την επίλυση ενός προβλήματος με τη διερεύνηση στρατηγικών επίλυσης) βοηθάει στον τρόπο ανασύστασης και αναδημιουργίας σχέσεων, που ενδεχομένως ένας μαθητής δεν θυμάται.

**(ii)** *Διδακτικές πρακτικές με έμφαση στην κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση της εμπλοκής στη μάθηση των μαθηματικών: η διαχείριση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στην τάξη*: Η διδακτική πράξη μπορεί να προσφέρει πολλαπλές ευκαιρίες για εμπλοκή των μαθητών σε **μαθηματικές συζητήσεις** μέσα στην τάξη. Οι συζητήσεις δημιουργούν ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές μαθαίνουν να ακούνε τα επιχειρήματα των άλλων, να ασκούν κριτική και να εκφράζουν τα δικά τους. Το περιβάλλον στο οποίο αυτό υλοποιείται μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές: μέσω της επικοινωνίας με έναν συμμαθητή τους, με άλλα μέλη μιας ολιγομελούς ομάδας ή μέσα στην ολομέλεια της τάξης. Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού ή των συμμαθητών μπορούν να αποτελέσουν το εφαλτήριο μιας συζήτησης: ερωτήσεις που αφορούν στην περιγραφή ή στην επεξήγηση μιας διαδικασίας, το σκεπτικό ενός τρόπου υπολογισμού, μιας προσέγγισης ή το σχηματισμό μιας εικασίας μπορούν να λειτουργήσουν ως αφετηρία ανάλυσης, επεξήγησης και σχηματισμού νέων ιδεών και οπτικών. Οι συζητήσεις μπορούν να προκληθούν και μετά από κατάλληλες ερωτήσεις του εκπαιδευτικού, οι οποίες επεκτείνουν τις σκέψεις των μαθητών, τους προκαλούν ή τους ξαφνιάζουν, που τους οδηγούν στην επανεξέταση και διερεύνηση συγκεκριμένων εννοιών, την ανάπτυξη ικανοτήτων και πρακτικών. Ο σχηματισμός χρήσιμων διδακτικά ερωτήσεων απαιτεί προετοιμασία από τον διδάσκοντα και ενασχόληση με θέματα που έχουν μαθηματικό ενδιαφέρον ή αποτελούν πηγές παρανοήσεων από τους μαθητές. Η χρήση ανοικτών ερωτήσεων, οι οποίες δεν απαντώνται με ένα ναι ή ένα όχι ή που έχουν πολλαπλές απαντήσεις ή ελλιπή δεδομένα, υποβοηθούν την ανάπτυξη συζητήσεων και συμμετοχικών διαδικασιών. Παράλληλα μεταφέρουν την εστίαση του διαλόγου από το δάσκαλο στους μαθητές και ενθαρρύνουν την έκφραση διαφορετικών οπτικών. Η υιοθέτηση ενός τέτοιου μοντέλου συζήτησης απαιτεί χρόνο εξοικείωσης από τους μαθητές.

Η διδακτική πρακτική της ενθάρρυνσης της **συνεργασίας** στην τάξη των μαθηματικών συνεισφέρει στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης αλλά και στη δημιουργία θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά (MacMath, Wallace, & Xiaohong, 2009). Ένα συνεργατικό περιβάλλον επιταχύνει την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών και παράλληλα συνεισφέρει στην ανάπτυξη αυτοπεποίθησης, συναισθημάτων ικανοποίησης και δημιουργία δεσμών συνάφειας με τα υπόλοιπα μέρη του συνόλου. Η κοινωνική δυναμική που δημιουργείται συνεισφέρει θετικά στη συμπερίληψη όλων των μαθητών σε ένα σύνολο ισότιμης συμμετοχής και δημιουργίας (Suurtamm et al., 2015). Η καλλιέργεια ισχυρών δεσμών μεταξύ των μελών συνεισφέρει στην ανάπτυξη της συνοχής της ομάδας και στην εκμάθηση τεχνικών συνεργασίας και συνεισφοράς σε ένα σύνολο. Παράλληλα, οι συνεργατικές τεχνικές είναι πιο αποτελεσματικές κατά την επίλυση προβλημάτων, καθώς η έκφραση διαφορετικών ιδεών οδηγεί συχνά σε καλύτερη κατανόηση των επόμενων σταδίων επίλυσης και διερεύνησης (Fleming, 2000).

Οι μαθητές χρειάζεται να ενθαρρύνονται να «κάνουν» Μαθηματικά μέσα από διαδικασίες που υποβοηθούν την εξερεύνηση και τη δημιουργία. Τρόποι ενεργής εμπλοκήςτων μαθητών μπορεί να είναι μέσω:

- της ενεργής αλληλεπίδρασης με άλλους μαθητές,
- της διερεύνησης μαθηματικών εννοιών με διαφορετικούς τρόπους (π.χ κιναισθητικός, αναλυτικός, εικονιστικός κλπ),

- της εμπλοκής τους σε συζητήσεις με σκοπό την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας,
- της διάθεσης ικανοποιητικού χρόνου για την ανάπτυξη και επεξεργασία των ιδεών τους.

Παράλληλα, η συνεργασία και η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης συντελεί στην αντιμετώπιση της **μαθηματικοφοβίας** (δηλαδή, συναισθημάτων άγχους, νευρικότητας και αποφυγής όταν ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με μαθηματικά προβλήματα) (Stuart, 2000). Οι αιτίες της μαθηματικοφοβίας μπορεί να αναζητηθούν στην έλλειψη αυτοπεποίθησης στις μαθηματικές ικανότητες του ίδιου του μαθητή, στις αντιλήψεις του εκπαιδευτικού, των άλλων μαθητών, του οικογενειακού ή κοινωνικού περιβάλλοντος. Λόγω της συσχέτισης που έχει η μαθηματικοφοβία με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά είναι σημαντικό να υιοθετηθούν στρατηγικές από τον εκπαιδευτικό μείωσης της, όπως αυτές που προτείνουν οι Jackson & Leffingwell (1999):

- προβολή θετικής στάσης απέναντι σε κάθε μαθητή ξεχωριστά
- ενθάρρυνση όλων των ερωτήσεων, αποριών κλπ των μαθητών
- συμπερίληψη των ενδιαφερόντων των μαθητών στις δραστηριότητες της τάξης
- αφιέρωση περισσότερου χρόνου σε μαθητές που δυσκολεύονται με τα Μαθηματικά
- χρήση ποικίλλων υλικών (π.χ γραπτές οδηγίες, ηλεκτρονικές πηγές, εποπτικό-χειραπτικό υλικό, χρήση ψηφιακών περιβαλλόντων )

Παράλληλα με την αντιμετώπιση της μαθηματικοφοβίας, η δημιουργία **θετικών στάσεων** απέναντι στα Μαθηματικά είναι σημαντικός παράγοντας δημιουργίας υψηλών επιδόσεων (Colgan, 2014). Πρακτικές όπως η στήριξη του εκπαιδευτικού προς τους μαθητές τους μαθητές, η υιοθέτηση θετικών στάσεων και προδιαθέσεων από τον ίδιο τον διδάσκοντα και η συνεργασία με τους γονείς/κηδεμόνες των μαθητών μπορούν να βοηθήσουν σε αυτήν την προοπτική.

## 6. **Βασικές Αρχές της Αξιολόγησης**

Η *αξιολόγηση* συμβάλλει στην εξέλιξη της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών και των μαθητριών και υποστηρίζει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων για τη διδασκαλία και τη μάθηση (NCTM, 2000). Η αξιολόγηση δεν συνιστά μια διακριτή συνιστώσα της διδασκαλίας, αλλά εντάσσεται στις διδακτικές πρακτικές και αναδεικνύει τις κατανοήσεις που έχουν επιτευχθεί.

Οι μορφές αξιολόγησης εντάσσονται γενικότερα σε δύο κυρίως κατηγορίες, την τελική και τη διαμορφωτική. Η *τελική* αξιολόγηση συνιστά μια αποτίμηση αθροιστικού χαρακτήρα, η οποία υποστηρίζει ελάχιστα τις διδακτικές αποφάσεις ή τον εντοπισμό παρανοήσεων, καθώς λειτουργεί αποσπασματικά. Με τη *διαμορφωτική* αξιολόγηση καθορίζεται το ‘σημείο’ στο οποίο το άτομο τοποθετείται γνωστικά σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, ενώ η τοποθέτηση αυτή ερμηνεύεται και αξιοποιείται για τη λήψη αποφάσεων και για τον επανασχεδιασμό της διδασκαλίας. Βασικές πτυχές της διαμορφωτικής αξιολόγησης αποτελούν (α) ο προσδιορισμός του ‘σημείου’ στο οποίο τοποθετείται γνωστικά το άτομο, (β) ο καθορισμός των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων, (γ) η επιλογή τρόπων επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων και (δ) ο σχεδιασμός για μελλοντική δράση (van de Walle et al., 2017).

Με βάση την προβληματική που αναπτύχθηκε παραπάνω, υιοθετείται η προσέγγιση της αξιολόγησης που στοχεύει στη μάθηση (assessment for learning) και ανατροφοδοτεί μαθητές και εκπαιδευτικούς. Η αξιολόγηση για τη μάθηση αξιοποιεί το σύνολο των διαδικασιών αξιολόγησης, τόσο τις διαμορφωτικές όσο και τις αθροιστικές, ενώ πραγματοποιείται περισσότερες από μία φορές κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Στο πλαίσιο της αξιολόγησης για τη μάθηση, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν την αξιολόγηση ως εργαλείο διερεύνησης της γνώσης και των ικανοτήτων των μαθητών, των παρανοήσεων, των προκαταλήψεων ή των ελλειμμάτων που μπορεί να έχουν.

Τα *εργαλεία αξιολόγησης* που προτείνονται στο πλαίσιο της αξιολόγησης με στόχο τη μάθηση δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να συλλέξει δεδομένα, ώστε να αποκτήσει μια συνολική θέαση της μαθησιακής πορείας και της διδασκαλίας και να λάβει τεκμηριωμένες αποφάσεις για την ενίσχυση της μάθησης και την εξέλιξη της διδασκαλίας. Σε αυτήν την κατεύθυνση η αξιολόγηση, η διδασκαλία και η μάθηση αλληλοτροφοδοτούνται.

Η προσέγγιση της αξιολόγησης για τη μάθηση υιοθετεί μια κυκλική αντίληψη *σύνδεσης της αξιολόγησης με τις διδακτικές πρακτικές* του εκπαιδευτικού. Ειδικότερα, η αξιολογική διαδικασία θεωρείται πλήρως ενσωματωμένη στη διδασκαλία και αναπτύσσεται σε τέσσερα στάδια με βάση το σχήμα 3 παρακάτω.

Η κριτική διερεύνηση της μάθησης και της διδασκαλίας, ο σχεδιασμός, η μάθηση μέσα από τη διδακτική πρακτική και η ανάπτυξη αναστοχαστικών διαδικασιών ως μέρους του επανασχεδιασμού της διδασκαλίας και της αξιολόγησης συνιστούν ένα πλαίσιο ανάπτυξης των διδακτικών πρακτικών, αλλά και του ίδιου του εκπαιδευτικού.


**Σχήμα 3.** Στάδια ανάπτυξης της αξιολογικής διαδικασίας (πηγή?)

## 7. **Ο κύκλος σχεδιασμού, υλοποίησης και αξιολόγησης της διδασκαλίας ως πλαίσιο ανάπτυξης της διδακτικής πρακτικής και επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού**

Οι σύγχρονες θεωρήσεις για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά προτείνουν την επαγγελματική μάθηση και τη συνεργασία μέσα από κοινότητες πρακτικής (Wenger, 1998) και κοινότητες διερεύνησης (Jaworski, 2006).

*Κοινότητα πρακτικής*: Τα άτομα "μοιράζονται" την επαγγελματική γνώση σε κοινές δράσεις και αλληλεπιδρούν στο πλαίσιο ενός κοινού εγχειρήματος. Η συμμετοχή του ατόμου στην κοινότητα πρακτικής αφορά τη διαπραγμάτευση και επαναδιαπραγμάτευση του εγχειρήματος (Lave & Wenger, 2005).

Η μάθηση των μελών μιας κοινότητας πρακτικής πραγματοποιείται μέσω μιας διαδικασίας νόμιμης 'περιφερειακής συμμετοχής'. Στο πλαίσιο αυτό η διδασκαλία αποτελεί μαθητεία σε μια κοινότητα πρακτικής, η οποία απαρτίζεται από έμπειρα και μη μέλη, τα οποία δεσμεύονται σε ένα κοινό εγχείρημα/ μια κοινή δράση (Wenger, 1998). Χαρακτηριστικά μιας κοινότητας πρακτικής είναι η *δέσμευση* στην κοινότητα, η *εικόνα-ταυτότητα* των ατόμων που την απαρτίζουν και η *ευθυγράμμιση* με τους στόχους της κοινότητας.

*Κοινότητα διερεύνησης*: Η Jaworski (2012) υπέδειξε την διερεύνηση της διδακτικής πράξης ως κρίσιμο *εργαλείο* επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά και ως *διαδικασία*, μέσα από την οποία οι εκπαιδευτικοί κατασκευάζουν ατομικές και συλλογικές εννοιολογικές κατανοήσεις και πρακτικές ως μέλη της κοινότητας πρακτικής τους (των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά). Χρησιμοποίησε τον όρο της 'κριτικής ευθυγράμμισης' για να αναφερθεί στην κριτική που ασκούν εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές στους στόχους, τις δράσεις και τις προοπτικές της κοινότητας πρακτικής (Goos, 2014). Η εξασφάλιση χρόνου για τη συνεργασία εκπαιδευτικών στο σχολείο αποτελεί σημαντικό παράγοντα υποστήριξης της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Sakonidis & Potari, 2014).

Μια εξαιρετικά δημοφιλής προσέγγιση στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά θεωρείται αυτή της *μελέτης μαθήματος (Lesson study)*, η οποία μπορεί να γίνει αντιληπτή ως μια δράση στο πλαίσιο της λειτουργίας μιας κοινότητας πρακτικής ή διερεύνησης (Huang, Takahashi & da Ponte, 2019). Οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται για να σχεδιάσουν επιλεγμένα μαθήματα και να εκφράσουν τον προβληματισμό τους για τη διδασκαλία που πρόκειται να πραγματοποιήσουν. Ειδικότερα, αποφασίζουν το μάθημα που θα διδαχθεί, προετοιμάζονται για τη συλλογή δεδομένων που αφορούν τους μαθητές και ορίζουν τον εκπαιδευτικό και την τάξη στην οποία θα πραγματοποιηθεί. Στη συνέχεια, σχεδιάζουν από κοινού το μάθημα, ένα μέλος της ομάδας διδάσκει και οι υπόλοιποι παρατηρούν, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία παρατήρησης που έχουν προ-αποφασίσει, Στη συνέχεια οργανώνουν και επεξεργάζονται τα δεδομένα που προκύπτουν από την παρατήρηση της διδασκαλίας. Τέλος, «μοιράζονται» τις παρατηρήσεις/ σημειώσεις τους, αναλύουν και συζητούν τα συμπεράσματα και (ως ομάδα) αναστοχάζονται σε σχέση με τη μάθηση που επιτεύχθηκε και το τι σήμαινε αυτό για τη δική τους διδασκαλία.

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν σε μια δράση 'μελέτης μαθήματος' αντιμετωπίζουν το μάθημα που αναλαμβάνουν καταρχήν ως το «καλύτερο» μάθημα που θα μπορούσαν να ετοιμάσουν και αφιερώνουν χρόνο για να συλλέξουν δεδομένα, συμπληρώνοντας φύλλα παρατήρησης. Για να αναστοχαστούν,· δηλαδή, δημιουργούν μαθήματα από τα οποία πρόκειται να μάθουν. Μέσω της παρατήρησης εξασφαλίζουν ότι θα συζητήσουν για όσα συμβαίνουν πραγματικά στην τάξη και λαμβάνουν ενήμερες (informed) αποφάσεις, οι οποίες βασίζονται σε γεγονότα της τάξης (Dudley et al., 2019).

Στο πλαίσιο της προσέγγισης επαγγελματικής ανάπτυξης Lesson study οι εκπαιδευτικοί έχουν τον απαιτούμενο χρόνο για να σχεδιάσουν ένα μάθημα, να αλληλεπιδράσουν, να αναπτύξουν τη σκέψη τους και να προβληματιστούν σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών και αναλαμβάνουν την ευθύνη για την ατομική επαγγελματική εξέλιξη, εστιάζοντας την προσοχή τους στους δικούς τους μαθητές.

## 8. Βιβλιογραφικές αναφορές για το Γενικό μέρος

Ainley, J., & Margolinas, C. (2013). Accounting for student perspectives in task design. *Task Design in Mathematics Education: an ICMI study 22*, 115-141.

Artigue, M. (2012). *Challenges in basic mathematics education.* Paris: UNESCO.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructive adaptive expertise*, 1-33. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Bussi, M. (2011). Artifacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 93-112.

Cai, J. & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 287-301.

Calleja, J. (2013). Mathematical investigations: The impact of students' enacted activity on design, development, evaluation and implementation In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22), 163–172. Oxford, UK. Available from http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Clarke, D. J., & Mesiti, C. (2013). Writing the student into the task: Agency and Voice. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. Thompson, & Y. Yang (Eds.). *Proceedings of ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education*, 175–184. Oxford: International Commission on Mathematics Instruction.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 81-89.

Colgan, L. (2014). Hey, it's elementary-improving mathematics achievement with (in) possible thoughts. *Gazette-Ontario Association for Mathematics*, *52*(4), 15.

Dudley, P., Xu, H., & Lang, J. (2019). Empirical evidence of the impact of lesson study on: students' achievement, teachers' professional learning and on institutional and system evolution: an illustrative, complex case-development exemplar in London. *European Journal of* Education, 54(2), 202-217.

English, L. (1997). Promoting a Problem-Posing classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4, 172-179.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics* 66, 61-75.

Fleming, D. S. (2000). *A Teacher's Guide to Project-Based Learning*. Scarecrow Education, Attn: Sales Department, 15200 NBN Way, PO Box 191, Blue Ridge Summit, PA 17214.

González, G., & Eli, J. A. (2017). Prospective and in-service teachers' perspectives about launching a problem. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*, 159-201.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM,* 46(2), 189–200.

Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.) (2012) Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Harwell, M. R., Post, T. R., Maeda, Y., Davis, J. D., Cutler, A. L., Anderson, E., & Kahan, J. A. (2007). Standards based mathematics curricula and secondary students' performance on standardized achievement tests. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(1), 71-101.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997) Mathematical tasks and student cognition: Classroom based factors that support and inhibit high level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524–549.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195-222.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, *65*, 97.

Huang, R., Takahashi, A., da Ponte, J. (2019). *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics: An International Perspectiv*e. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Huntley, M. A., Rasmussen, C. L., Villarubi, R. S., Sangtong, J., & Fey, J. T. (2000). Effects of standards-based mathematics education: A study of the Core-Plus Mathematics Project algebra and functions strand. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(3), 328-361.

Ing, M., Webb, N., Franke, M., Turrou, A., Wong, J., Shin. N. Fernandez, C. (2015). Student participation in elementary mathematics classrooms: the missing link between teacher practices and students' achievement? *Educational Studies in Mathematics* 66, 341-356.

Jackson, C. D., & Leffingwell, R. J. (1999). The role of instructors in creating math anxiety in students from kindergarten through college. *The Mathematics Teacher*, *92*(7), 583-586.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 187–211.

Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads. *ZDM,* 44, 613–625.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge university press.

Macmath, S., Wallace, J., and Chi, X. (2009). Problem-Based Learning in Mathematics A Tool for Developing Students' Conceptual Knowledge. *What Works? Research into Practice* (Online).

Margolinas, C. (2013). Task design in mathematics education. *Proceedings of ICMI study 22*, Oxford, UK: ICMI.

Mariotti M. A. (2000) Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25–53.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

Riordan, J. E., & Noyce, P. E. (2001). The impact of two standards-based mathematics curricula on student achievement in Massachusetts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(4), 368-398.

Sakonidis, C., & Potari, D. (2014). Mathematics teacher educators'/researchers' collaboration with teachers as a context for professional learning. *ZDM, 46*(2), 293–304. doi:10.1007/s11858-014-0569-z.

Schoenfeld, A. H. (2002). Purposes and methods of research in mathematics education. *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*, 221-236. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM*, *52*(6), 1163-1175.

Schroeder, T. L. & Lester, F. K., Jr (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton (Ed.) *New directions for elementary school mathematics*, 31-42. Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., & Kim, G. (2009) The role of mathematics curriculum materials in large scale urban reform. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction*, 37-55. New York: Routledge.

Stuart, V. (2000). Math curse or math anxiety? *Teaching children mathematics*, *6*(5), 330-335.

Suurtamm, C., & Neubrand, M. (2015). Assessment and testing in mathematics education. In Sung Je Cho (Ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges*, 557-562. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Thompson, D. R., & Senk, S. L. (2001). The effects of curriculum on achievement in second-year algebra: The example of the University of Chicago School Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 58-84.

Τζεκάκη, Μ. (2015). Μαθηματική Δραστηριότητα και μαθηματικά έργα. Στο Μ. Καλδρυμίδου & Ξ. Βαμβακούση (Επ.) *Πρακτικά 11ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 51-66. Ιωάννινα: ΕΝΕΔΙΜ.

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J., & da Ponte, J. P. (2020). Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-Based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2), 2-14.

van de Walle, J. A., Bay-Williams, J.M., Karp, K. S. (2014). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Toronto: Pearson Canada

van de Walle, J. A., Lovin L. H., Karp K. S., Bay - Williams J. M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο*, Αθήνα: Τυπωθήτω/ Δαρδανός.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wood, T. (2000). Differences in teaching and opportunities for learning in primary mathematics classes. *ZDM*, 5, 149-154.

# Β. ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

## 1. ΠΕΔΙΟ Ι: ΑΡΙΘΜΟΣ, ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΝΑΛΥΣΗ

### 1.1 ΑΡΙΘΜΟΣ

#### 1.1.1 Σημασία του υπο-πεδίου «Αριθμός»

Τα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών για το Δημοτικό Σχολείο ‘αφιερώνουν’ μεγάλο μέρος του περιεχομένου τους στη μελέτη των αριθμών και των πράξεων. Ωστόσο, οι έρευνες που αφορούν την κατανόηση των αριθμητικών ιδεών από τους μαθητές καταγράφουν απογοητευτικά αποτελέσματα. Το φαινόμενο αυτό αποδίδεται συνήθως στην υπέρμετρη έμφαση που δίνεται στη διαδικαστική έναντι της εννοιολογικής κατανόησης των αριθμών και στη μη αξιοποίηση της πλούσιας, άτυπης αριθμητικής γνώσης των μαθητών. Για τον λόγο αυτά τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην κατανόηση της έννοιας των φυσικών αριθμών που σχετίζεται με την απόδοση νοήματος στους αριθμούς 0-9 και τις μεταξύ τους σχέσεις, τη δόμηση του συστήματος των φυσικών αριθμών (δεκάδες, εκατοντάδες κ.λπ.) σε σύνδεση με τη γραφή και τη θεσιακή αξία των ψηφίων, την ανάπτυξη υπολογιστικών διαδικασιών που επεκτείνονται και την επίλυση προβλημάτων με τέσσερις πράξεις σε διαφορετικά πλαίσια.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών, ειδικά στις μικρές τάξεις, είναι αναγκαίο να αξιοποιεί δραστηριότητες με χρήση χειραπτικών υλικών που τοποθετούν τους αριθμούς σε λειτουργική θέση στην καθημερινή εμπειρία των παιδιών και αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος. Ακόμη, απαραίτητο είναι να δίνεται έμφαση σε δραστηριότητες που ευνοούν την ανάπτυξη της ‘μαθηματικής επιχειρηματολογίας’ από τα ίδια τα παιδιά, κυρίως όταν χρειάζεται να εξηγήσουν τις ιδέες και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν.

Η συστηματική διδασκαλία της έννοιας του αριθμού, βασισμένη στις εμπειρικές ιδέες των μαθητών, έχει ξεκινήσει από το Νηπιαγωγείο με τις βασικές δεξιότητες που αφορούν τους αριθμούς ως το 10, δηλαδή αναγνώριση και καταμέτρηση ποσοτήτων, απαγγελία και γραφή των αριθμών, σύγκριση, διάταξη και αναπαράστασή τους στην αριθμογραμμή, ανάλυση και σύνθεση των αριθμών και διερεύνηση απλών προσθετικών και αφαιρετικών καταστάσεων. Οι μαθητές στην πρώτη τάξη θα διευρύνουν αυτές τις γνώσεις τους σε αριθμούς ως το 100 και στην Β΄ τάξη ως το 1000. Επίσης, με την υπέρβαση της δεκάδας, θα ασχοληθούν με τη δόμηση των σχέσεων των αριθμών ως το 100 και θα τη συνδέσουν με τη θεσιακή αξία των ψηφίων στο δεκαδικό σύστημα. Θα ασκηθούν στην εκτίμηση ποσοτήτων και στην επαλήθευση της εκτίμησής τους με στρατηγικές καταμέτρησης και υπολογισμού. Θα εισαχθούν σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις μέσω της ομαδοποίησης αντικειμένων, αρχικά στην εύρεση του διπλάσιου και του μισού μιας ποσότητας. Στις επόμενες τάξεις του δημοτικού σχολείου, οι γνώσεις των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς θα επεκταθούν στις δομικές ιδιότητές τους και στις σχέσεις μεταξύ τους και θα εμπλουτιστούν με τους κλασματικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς. Ακόμη θα αποκτήσουν δεξιότητες διεκπεραίωσης των αλγόριθμων των τεσσάρων πράξεων με τους φυσικούς αριθμούς αρχικά και κατόπιν με τους κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς. Τέλος, θα εξασκηθούν στην επίλυση προβλημάτων με τις τέσσερις πράξεις.

Ο φυσικός αριθμός αποτελεί μία από τις πλέον θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες, με τις οποίες έρχεται σε επαφή το παιδί από την αρχή της ζωής του και σε όλη τη διάρκειά της, με αποτέλεσμα να έχει ιδιαίτερη αξία για τη μαθηματική του εκπαίδευση. Αναγνωρίζοντας αυτήν ακριβώς την αξία, οι συντάκτες των Προγραμμάτων Σπουδών των μαθηματικών αποδίδουν ιδιαίτερη σημασία στην έννοια του φυσικού αριθμού και, κατ' επέκταση, στο σύνολο των φυσικών αριθμών, κυρίως στις ηλικιακές ομάδες 5 – 8 και 8 – 12.

Καθώς η κοινωνία στηρίζεται προοδευτικά στην ποσοτική κωδικοποίηση της πληροφορίας και στα υπολογιστικά περιβάλλοντα, οι καταστάσεις στις οποίες το άτομο καλείται να διαχειριστεί επιτυχώς αριθμητικά δεδομένα, όχι μόνο σε σχέση με φυσικούς, αλλά και με άλλους αριθμούς, αυξάνονται σημαντικά στην καθημερινή ζωή, στη συμμετοχή στα δρώμενα της κοινότητας, στην εργασία, στο σχολείο. Σήμερα, η εκπαίδευση που αφορά τους φυσικούς αριθμούς και γενικότερα τους αριθμούς επικεντρώνεται στο να διαμορφώσει πολίτες που να είναι σε θέση να αξιοποιήσουν τις αριθμητικές τους γνώσεις για να ανταποκριθούν με επιτυχία σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δράσης. Όταν οι μαθητές εισέρχονται στην ηλικιακή ομάδα 8-12 και κατά τη σχολική τους εκπαίδευση, αναμένεται να είναι σε θέση να χειρίζονται με σχετική ευχέρεια τον φυσικό αριθμό ως έννοια μέχρι το 1.000, ορισμένες ιδιότητές του (π.χ. αντιμεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα), τις τέσσερις πράξεις με φυσικούς αριθμούς, καθώς και να επιλύουν απλά και σύνθετα προβλήματα με τέσσερις πράξεις. Με το τέλος της δημοτικής εκπαίδευσης, οι παραπάνω γνώσεις αναμένεται να έχουν επεκταθεί στο σύνολο των φυσικών αριθμών και να έχουν εδραιωθεί.

### 1.1.2 Ανάπτυξη των ΠΜΑ στο υπο-πεδίο «Αριθμός»

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει το μαθηματικό περιεχόμενο των ΠΜΑ που αφορούν τον αριθμό στο Δημοτικό Σχολείο στο νέο ΠΣ, καθώς και την οργάνωση και κατανομή τους κατά θεματική ενότητα και υπο-ενότητα.

| Υπο-πεδίο | Θεματικές ενότητες | Θεματικές υπο-ενότητες | ΠΜΑ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| ΑΡΙΘΜΟΣ | Φυσικοί | *Έννοια* | Αρίθμηση |
| | | | Εκτίμηση πληθικότητας συνόλου |
| | | *Αναπαράσταση* | Εικονιστική |
| | | | Λεκτική |
| | | | Συμβολική |
| | | *Σύγκριση & Διάταξη* | |
| | | *Πράξεις* | Έννοια |
| | | | Υπολογισμός |
| | | | Ιδιότητες |
| | | *Θεωρία Αριθμών* | Κριτήρια Διαιρετότητας |
| | | | ΕΚΠ & ΜΚΔ |
| | | | Ευκλείδια Διαίρεση |
| | | | Μαθηματική Επαγωγή |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | |
| | | | |
| | Ρητοί | *Έννοια* | Κλασματικός αριθμός |
| | | | Δεκαδικός ορισμός |
| | | *Απόλυτη τιμή* | |
| | | *Αναπαράσταση* | Εικονιστική |
| | | | Συμβολική |
| | | *Σύγκριση & Διάταξη* | Ισοδυναμία |
| | | | Διάταξη |
| | | *Πράξεις* | Στρατηγικές |
| | | | Εκτέλεση |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | |
| | | | |
| | Ακέραιοι | *Έννοια* | |
| | | *Απόλυτη τιμή* | |
| | | *Αναπαράσταση* | |
| | | *Σύγκριση & Διάταξη* | |
| | | *Πράξεις* | |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | |
| | | | |
| | Άρρητοι & Πραγματικοί Αριθμοί | *Έννοια* | Άρρητοι |
| | | | Πραγματικοί |
| | | *Απόλυτη τιμή* | |
| | | *Αναπαράσταση* | Γεωμετρική |
| | | | Δεκαδική |
| | | *Σύγκριση & Διάταξη* | |
| | | *Πράξεις* | Υπολογισμός |
| | | | Δυνάμεις |
| | | | Ιδιότητες |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | |
| | | | |

Για κάθε θεματική ενότητα, η πορεία ανάπτυξης των σχετικών ΠΜΑ και η εστίαση της μαθησιακής εμπειρίας που προσφέρεται στους μαθητές κατά τάξη έχουν όπως περιγράφεται ακολούθως.

**(α).** *Ανάπτυξη των ΠΜΑ για τη θεματική ενότητα « Φυσικοί αριθμοί»*

Φυσικός αριθμός & το σύνολο των φυσικών αριθμών

- Αναγνώριση φυσικών αριθμών σε μια ποικιλία από πλαίσια και με τη χρήση διάφορων στρατηγικών.
- Αναπαράσταση φυσικών αριθμών (με φυσικά αντικείμενα, με εικόνες, λεκτικά, ως σημεία στην ευθεία, με ψηφία/ σύμβολα).
- Αρίθμηση και απαρίθμηση και αναπαράσταση των σχετικών διαδικασιών με διαφορετικούς τρόπους.
- Σύγκριση και διάταξη φυσικών αριθμών.
- Ανάλυση και σύνθεση φυσικών αριθμών με διαφορετικούς τρόπους (αξία θέσης ψηφίου).
- Διάκριση φυσικών από άλλους αριθμούς.

Πράξεις στους φυσικούς αριθμούς

- Αναγνώριση των τεσσάρων πράξεων σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους/ στρατηγικές (νοερά, προφορικά και γραπτά).
- Εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους/ στρατηγικές (νοερά, προφορικά και γραπτά).
- Αναγνώριση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων και της σχέσης μεταξύ τους.
- Αξιοποίηση των τεσσάρων πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων.
- Επικοινωνία των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων.
- Ανάπτυξη μεθόδων αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των πράξεων.

Οι μαθητές μέχρι τη Β΄ τάξη εργάζονται στην πρώτη χιλιάδα και σε μια ποικιλία από πλαίσια. Αναφορικά με τον αριθμό και το σύνολο των φυσικών αριθμών, η εργασία στην τάξη εστιάζεται στην αναγνώριση (άμεση και μέσω αντιστοίχισης), στην ανάγνωση (προφορική και γραπτή) και στην αναπαράσταση φυσικών αριθμών (με φυσικά υλικά, εικόνες, λέξεις, σύμβολα και στην ευθεία). Επιπλέον, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να αποκτήσουν εμπειρίες και ευχέρεια στη σύνθεση και την ανάλυση φυσικών αριθμών, αλλά και στη σύγκριση και τη διάταξή τους. Τέλος, να αναπτύσσουν δεξιότητες και ικανότητες αρίθμησης και απαρίθμησης.

Σχετικά με τις πράξεις στους φυσικούς αριθμούς, η έμφαση βρίσκεται στην κατανόηση των τεσσάρων πράξεων και στην αναγνώριση, αναπαράσταση και εφαρμογή τους σε μια ποικιλία από καταστάσεις. Επιπλέον, οι μαθητές εμπλέκονται σε καταστάσεις εκτίμησης και υπολογισμού του αποτελέσματος αριθμητικών παραστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ακόμη, ενθαρρύνονται να αναπτύσσουν και να αξιοποιούν στρατηγικές νοερών υπολογισμών, άτυπες και τυπικές διαδικασίες εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων (πολλαπλασιαστής έως διψήφιος και διαιρέτης μονοψήφιος) και να διερευνούν τη σχέση μεταξύ των τεσσάρων πράξεων. Τέλος, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων (έως δύο πράξεων), να τις τεκμηριώνουν και να ελέγχουν τη 'λογικότητα' της λύσης.

Στη συνέχεια, η μαθησιακή δράση στοχεύει στη συστηματοποίηση της αντίστοιχης σκέψης των μαθητών, ώστε να οδηγηθούν προοδευτικά στην κατανόηση των δομικών και των λειτουργικών χαρακτηριστικών του συνόλου των φυσικών αριθμών. Σε αυτήν την κατεύθυνση προσφέρονται στους μαθητές επιπλέον μαθησιακές εμπειρίες, όπως η παρένθεση στις αριθμητικές παραστάσεις και η χρήση της αριθμομηχανής για τη διευκόλυνση της ουσιαστικής μαθηματικής σκέψης (συνήθως μετά τη Γ΄ τάξη). Ακόμη οι μαθητές καλούνται να θέτουν και να διερευνούν ερωτήματα σχετικά με τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών (αναγνώριση της Ευκλείδειας διαίρεσης και των κριτηρίων διαιρετότητας), αλλά και τη σχέση των φυσικών με τους άλλους αριθμούς.

**(β).** *Ανάπτυξη των ΠΜΑ για τη θεματική ενότητα «Θετικοί Ρητοί/ Κλασματικοί αριθμοί*

Κλασματικός αριθμός & το σύνολο των κλασματικών αριθμών

- Χωρισμός διακριτών και συνεχών ποσοτήτων σε ίσα μέρη, διερεύνηση και περιγραφή της μεταξύ τους σχέσης.
- Αναγνώριση, αναπαράσταση και διαφορετικές ερμηνείες της σχέσης μέρους/ όλου.
- Αναγνώριση, διερεύνηση, αναπαράσταση και κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων.
- Σύγκριση κλασματικών αριθμών.
- Διερεύνηση της σχέσης κλασματικών και φυσικών αριθμών

Πράξεις στους κλασματικούς αριθμούς

- Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους.
- Αναγνώριση και διερεύνηση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με κλάσματα.
- Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση πράξεων με κλάσματα και φυσικούς αριθμούς.
- Αξιοποίηση των πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων.
- Επικοινωνία σχετικά με τις στρατηγικές επίλυσης.
- Ανάπτυξη μεθόδων/στρατηγικών αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των πράξεων με κλάσματα.

Μέχρι και τη Β΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες σύγκρισης εμπράγματων ποσοτήτων, διακριτών και συνεχών, βρίσκουν τη σχέση μεγέθους τους και την περιγράφουν λεκτικά. Ακόμη, εισάγονται στη συμβολική γραφή απλών κλασμάτων (π.χ., ½, 1/3, 2/3, ¼, 2/4…).

Στη συνέχεια, οι δραστηριότητες επαναλαμβάνονται, αλλά περιλαμβάνουν εικονικές και συμβολικές ποσότητες, ενώ στα ανάγωγα κλάσματα προστίθενται προοδευτικά καταχρηστικά και μικτά κλάσματα. Επιπλέον, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αναπαραστήσουν την ίδια σχέση μεγεθών με διαφορετικές κλασματικές αναπαραστάσεις, να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα σε δύο ανάγωγα (π.χ., μεταξύ 2/3 και ¾) και να συγκρίνουν κλάσματα με διαφορετικούς τρόπους. Για τη σύγκριση και τη διάταξη κλασμάτων, ακολούθως, οι μαθητές εισάγονται στη διαδικασία μετατροπής τους σε ομώνυμα (κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων) με τη χρήση του ΕΚΠ. Τέλος, εισάγονται στην έννοια του κλάσματος ως αριθμού, αλλά και στην έννοια του λόγου.

Αναφορικά με τις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς, αρχικά, οι μαθητές προσθέτουν και αφαιρούν ομώνυμα, απλά ετερώνυμα, οποιαδήποτε ανάγωγα και καταχρηστικά κλάσματα, με αυτήν τη σειρά. Ακολούθως, ασχολούνται με τον πολλαπλασιασμό και συνεχίζουν με τη διαίρεση (αρχικά, μεταξύ φυσικών και κλασματικών αριθμών και, στη συνέχεια, μεταξύ κλασματικών αριθμών). Και για τις τέσσερις πράξεις αξιοποιούνται και ενθαρρύνονται διάφορες μέθοδοι/ στρατηγικές εκτέλεσης, ενώ προοδευτικά εισάγεται ο καθιερωμένος αλγόριθμος. Ακόμη, οι μαθητές διερευνούν την ισχύ των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με φυσικούς και στην περίπτωση των κλασματικών αριθμών. Τέλος, εισάγονται στα ποσοστά, μετατρέπουν κλασματικούς αριθμούς σε ποσοστά και τα χρησιμοποιούν στη μοντελοποίηση καταστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.

**(γ)**. *Ανάπτυξη των ΠΜΑ για τη θεματική ενότητα «Δεκαδικοί αριθμοί»*

<u>Δεκαδικός αριθμός και το σύνολο των δεκαδικών αριθμών</u>

- Αναγνώριση δεκαδικών αριθμών σε μια ποικιλία από καθημερινά και άλλα πλαίσια.
- Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και ποσοστά και αντιστρόφως.
- Αναγνώριση και αξιοποίηση της αξίας της έννοιας του ποσοστού στην αντιμετώπιση καθημερινών καταστάσεων.
- Στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών.

<u>Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς</u>

- Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς.
- Έλεγχος της ‘λογικότητας’ του αποτελέσματος των πράξεων με δεκαδικούς, με τη χρήση εκτιμήσεων.
- Αξιοποίηση των δεκαδικών αριθμών, των ποσοστών, των σχετικών πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων.
- Ανάπτυξη μεθόδων αξιολόγησης του αποτελέσματος των πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς.

Οι μαθητές, μέχρι τη Β΄ τάξη, μέσω πρακτικών δραστηριοτήτων, εισάγονται στη γραφή και την ανάγνωση δεκαδικών αριθμών, καθώς και στην (κυρίως προσεγγιστική) τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή.

Στη συνέχεια και σε σχέση με την έννοια του δεκαδικού αριθμού και το αντίστοιχο σύνολο, οι μαθητές μελετούν τα δεκαδικά κλάσματα ως ειδική περίπτωση κλασμάτων (αρχικά με παρονομαστή το 10 και το 100 και αργότερα οποιαδήποτε θετική δύναμη του 10), εισάγονται στον δεκαδικό συμβολισμό και αναγνωρίζουν ότι κάθε δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο δεκαδικό μέρος είναι ένα κλάσμα. Επιπλέον, διατάσσουν δεκαδικούς αριθμούς και τους τοποθετούν στην αριθμογραμμή. Τέλος, στρογγυλοποιούν έναν αριθμό με ένα ή δύο δεκαδικά ψηφία στον πλησιέστερο ακέραιο ή στην πλησιέστερη δεκάδα.

Σε ό,τι αφορά τις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να προσθέτουν και να αφαιρούν δεκαδικούς αριθμούς, νοερώς μέχρι και δύο δεκαδικά ψηφία και γραπτώς με ένα, δύο και περισσότερα δεκαδικά ψηφία, με αυτή τη σειρά. Αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, στις πρώτες σχετικές εμπειρίες των μαθητών, πολλαπλασιαστής και διαιρέτης είναι μονοψήφιοι φυσικοί, ενώ, στη συνέχεια, είναι δεκαδικοί με ένα δεκαδικό ψηφίο, με δύο δεκαδικά ψηφία, κ.ο.κ. Και για τις τέσσερις πράξεις ενθαρρύνονται και αξιοποιούνται διάφορες μέθοδοι/ στρατηγικές εκτέλεσης, ενώ προοδευτικά εισάγεται ο καθιερωμένος αλγόριθμος. Ακόμη, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές, για να ελέγχουν αν το αποτέλεσμα των πράξεων είναι λογικό, καθώς και την αριθμομηχανή για να 'επιτρέψουν' στη σκέψη να ασχοληθεί περισσότερο με τα μη υπολογιστικά «συστατικά» της μαθηματικής γνώσης.

**(δ)**. *Ανάπτυξη των ΠΜΑ για τη θεματική ενότητα «Ακέραιοι αριθμοί»*

Ακέραιος αριθμός και το σύνολο των ακέραιων αριθμών

- Διαισθητική αντίληψη των ακέραιων αριθμών μέσω μιας ποικιλίας από καθημερινές καταστάσεις.
- Αναγνώριση και αναπαράσταση ακέραιων αριθμών σε διαφορετικά πλαίσια.
- Σύγκριση και διάταξη ακέραιων αριθμών με τη χρήση της αριθμογραμμής.
- Αναγνώριση και αξιοποίηση της ιδιότητας των αντίθετων ακεραίων.

Πράξεις με ακέραιους αριθμούς

- Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς, με τη χρήση κατάλληλων μοντέλων.
- Αναγνώριση και διερεύνηση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς.
- Αξιοποίηση των ακέραιων αριθμών, των πράξεων στο αντίστοιχο σύνολο και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση μαθηματικών και καθημερινών προβλημάτων (μοντελοποίηση).

Μετά από τη Β΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου επιχειρείται μια πρώτη αισθητοποίηση της έννοιας των ακέραιων αριθμών από τους μαθητές. Ειδικότερα, οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν διαισθητικά τη σχετική έννοια, μέσα από καθημερινές καταστάσεις, να συνειδητοποιήσουν την ανάγκη επέκτασης της αριθμογραμμής, να διατάξουν ακέραιους αριθμούς με πλαίσιο αναφοράς την αριθμογραμμή και να πειραματιστούν με απλές προσθέσεις και αργότερα αφαιρέσεις ακεραίων αριθμών (π.χ., την προηγούμενη εβδομάδα έδωσα 2 παιχνίδια μου σε έναν φίλο και άλλο 1 σε κάποιον άλλον φίλο για να παίξουν. Πόσα λιγότερα παιχνίδια είχα;).

### 1.1.3 Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες μαθητών στο υπο-πεδίο «Αριθμός»

#### *1.1.3α Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης / σκέψης*

Τα παιδιά, από πολύ νωρίς, έρχονται αντιμέτωπα με μια πληθώρα από αριθμητικά φαινόμενα, τα οποία ελκύουν το ενδιαφέρον και την περιέργειά τους. Οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν μια ανεξάντλητη και ερεθιστική πηγή ευκαιριών για ανακαλύψεις. Έτσι, η καθημερινότητά τους προσφέρει το πρώτο και πιο προκλητικό περιβάλλον για αλληλεπιδράσεις με νόημα και, επομένως, για την προώθηση της διαδικασίας μάθησης του αριθμού. Η διεύρυνση αυτού του πρώτου πεδίου ‘αριθμητικής δράσης’ με το σχολικό περιβάλλον διαμορφώνει νέους ορίζοντες μάθησης για τον αριθμό, καθώς με οργανωμένο πλέον τρόπο οι μαθητές οδηγούνται στη μετάβαση από την άτυπη αριθμητική γνώση στην τυπική, στη μύηση στο ‘αριθμητικό/μαθηματικό κεφάλαιο’ του ανθρώπινου πολιτισμού. Προσκαλούνται, συγκεκριμένα, να γίνουν «ενάριθμοι» (numerate), να αναπτύξουν την *αίσθηση του αριθμού* (*number sense*), μια γενική κατανόηση του αριθμού και των πράξεων με αριθμούς, την ικανότητα ευέλικτης αξιοποίησης αυτής της κατανόησης για τη συγκρότηση και τη διατύπωση μαθηματικών κρίσεων, καθώς και την ανάπτυξη χρήσιμων στρατηγικών διαχείρισης των αριθμών και των πράξεων με αριθμούς.

Ένα εξαιρετικά μεγάλο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης που προσφέρεται στην υποχρεωτική εκπαίδευση αφορά τη μελέτη διαφόρων αριθμητικών συνόλων. Παρόλα αυτά, όπως έχει ήδη επισημανθεί, οι σχετικές έρευνες καταγράφουν συνεχώς απογοητευτικά επίπεδα κατανόησης των αριθμητικών ιδεών. Οι λόγοι της περιορισμένης ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού αναζητούνται, κυρίως, στην αποτυχία της διδακτικής πράξης και της πολιτικής της μαθηματικής εκπαίδευσης να αναδείξει τα δομικά στοιχεία των αριθμητικών συνόλων που διδάσκονται στο σχολείο, στην υπέρμετρη έμφαση στη διαδικαστική παρά στην εννοιολογική κατανόηση των αριθμών, στη μη αξιοποίηση της πλούσιας, άτυπης αριθμητικής γνώσης των μαθητών και στην απουσία ή την αδυναμία υιοθέτησης λειτουργικών μηχανισμών παρακολούθησης και ανατροφοδότησης της μαθησιακής αλλά και της διδακτικής πορείας.

Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους μαθητές κατέχει κεντρική θέση στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών στο σύνολο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, ενώ έχει οργανωθεί με βάση τις εξής κατευθυντήριες γραμμές: (α) Τα αριθμητικά περιεχόμενα αναπτύσσονται σε όλες τις τάξεις προοδευτικά και σε επάλληλα επίπεδα αφαίρεσης και γενίκευσης, προσφέροντας σε κάθε επίπεδο επαρκή χρόνο επεξεργασίας της εννοιολογικής και της διαδικαστικής μαθηματικής γνώσης που κρίνεται αναγκαία, (β) Η οργάνωση της ανάπτυξης των αριθμητικών περιεχομένων γίνεται με βάση τη σχετική βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, αποφάσεις ιεράρχησης, εμβάθυνσης, εστίασης, κ.ά. σχετικά με ένα συστατικό της επιδιωκόμενης μαθηματικής γνώσης στηρίχτηκαν σε αντίστοιχα ερευνητικά δεδομένα, (γ) Η ανάπτυξη του αριθμητικού περιεχομένου γίνεται με τρόπο που καθιστά δυνατή την παρακολούθησή της τόσο από τον μαθητή όσο και από τον εκπαιδευτικό.

Κεντρικά ερευνητικά πορίσματα για καθένα από τα σύνολα αριθμών που περιλαμβάνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών (φυσικοί, κλασματικοί/δεκαδικοί, ακέραιοι, ρητοί και πραγματικοί αριθμοί) ενισχύουν τη σκιαγράφηση του επιθυμητού προσανατολισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης που αφορά την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους μαθητές (van de Walle, 2017).

*1.1.3β Δυσκολίες μαθητών*

Οι κυριότερες δυσκολίες που έχουν καταγραφεί από έρευνες για τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου αφορούν τη διάταξη των αριθμών στην αριθμογραμμή, όπως και την κατανόηση της θεσιακής αξίας αλλά κυρίως την αντίληψη των αριθμών ως αθροίσματα μονάδων και ως ομάδων με περισσότερα στοιχεία (δυάδες, τριάδες, πεντάδες κ.λπ.). Αυτό οδηγεί σε μια αθροιστική αντίληψη των αριθμών που υστερεί σε σχέση με την πολλαπλασιαστική, η οποία είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση των σχέσεων ανάμεσα στους αριθμούς και τη δόμηση του δεκαδικού συστήματος (για παράδειγμα, το 6 είναι 2 τριάδες, το 8 είναι 2 τετράδες και το 100 είναι δέκα δεκάδες). Οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν όχι μόνο ότι σε μία εξάδα, μία οκτάδα ή μία δεκάδα υπάρχουν 6, 8 ή 10 μονάδες αντίστοιχα αλλά να αντιληφθούν την εξάδα, την οκτάδα και τελικά τη δεκάδα ως μια αδιαίρετη ενότητα, μια νέα μονάδα και να μπορούν να μετρήσουν μια ποσότητα με τη νέα αυτή μονάδα. Στην Β΄ τάξη θα χρειαστεί να είναι σε θέση να αντιληφθούν το ανάλογο για την εκατοντάδα.

Επίσης, δυσκολίες καταγράφονται τόσο στη διεκπεραίωση των πράξεων όσο και στη διαχείριση αντίστοιχων προβληματικών καταστάσεων. Ειδικότερα στην Α΄ τάξη οι μαθητές συχνά εμφανίζουν δυσκολία να αντιληφθούν την αφαίρεση ως τη διαφορά των δύο αριθμών. Σημαντικά στοιχεία στην ανάπτυξη της γνώσης για την πρόσθεση και την αφαίρεση είναι οι σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας και το πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζεται η πράξη κάθε φορά (συνδυασμός ποσοτήτων ή αλλαγής μιας ποσότητας). Είναι σημαντικό οι μαθητές να έρχονται αντιμέτωποι με προβληματικές καταστάσεις οι οποίες αναφέρονται σε διαφορετικά είδη αθροιστικών σχέσεων (πρόσθεσης και αφαίρεσης) και στην Β΄ τάξη αντιστοίχως με προβληματικές καταστάσεις που αφορούν σε μια ποικιλία πολλαπλασιαστικών σχέσεων (πολλαπλασιασμού και διαίρεσης). Η ελλιπής ή ανεπαρκής εμπειρία των μαθητών με σχετικά έργα στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου μπορεί να ορθώσει εμπόδια στην κατανόηση και τον ευχερή χειρισμό ανάλογων καταστάσεων με μεγαλύτερους αριθμούς σε μεταγενέστερη φάση της μαθηματικής τους εκπαίδευσης.

Η αξία θέσης ψηφίου είναι πιθανόν να μην έχει αποσαφηνιστεί ακόμη και μέχρι το τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, γεγονός που μπορεί να επιφέρει δυσκολίες στους μαθητές κατά την εκτέλεση πράξεων με φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς, είναι σημαντικό να διασφαλιστεί η κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων από όλους τους μαθητές, μέσω κατάλληλα οργανωμένων δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης αριθμών.

Αναφορικά με τις πράξεις, με το τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν παρατηρούνται ιδιαίτερες δυσκολίες στην πλειονότητα των μαθητών ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση τουλάχιστον των φυσικών αριθμών. Ωστόσο, στην περίπτωση της αφαίρεσης, τα λάθη και τα προβλήματα κατανόησης είναι συχνότερα σε σχέση με την πρόσθεση και συνδέονται με ζητήματα ελλιπούς κατανόησης της διαδικασίας δανεισμού, της αξίας θέσης ψηφίου και του μηδενός. Στον πολλαπλασιασμό τα λάθη των μαθητών είναι λιγότερα, ωστόσο ο αλγόριθμος της διαίρεσης θεωρείται ο δυσκολότερος, καθώς η επιτυχής προσέγγισή του απαιτεί την κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων και την ευχέρεια στην εκτέλεση πράξεων.

Γενικά, η σύγχρονη επιστημονική βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι, για να μπορέσει ένας μαθητής να ανταποκριθεί επιτυχώς σε καταστάσεις με φυσικούς αριθμούς είναι ανάγκη (α) να διαθέτει καλή γνώση του μαθηματικού περιεχομένου (π.χ., αναπαράσταση ενός μεγάλου φυσικού αριθμού, ιδιότητες πράξεων), (β) να κατανοεί τον τρόπο με τον οποίο το πλαίσιο καθορίζει το μαθηματικό νόημα (π.χ., ο αριθμός 40 ως θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου είναι υψηλός, αλλά ως έκφραση του βάρους ενός ενήλικα είναι χαμηλός), και (γ) να επιλέγει και να διαχειρίζεται αποτελεσματικά στρατηγικές επίλυσης προβλήματος (π.χ., διατύπωση της κατάλληλης ερώτησης). Επιπλέον, ο μαθητής είναι σημαντικό να μπορεί να δραστηριοποιείται με επιτυχή τρόπο σε τρία επίπεδα: (α) της άμεσης και με ευχέρεια εφαρμογής αριθμητικών γνώσεων (π.χ., υπολογισμός της τιμής μιας αριθμητικής παράστασης), (β) της δημιουργικής αξιοποίησής τους για τη διερεύνηση νέων καταστάσεων (π.χ., η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής ανάπτυξης μιας πόλης), και (γ) της κριτικής θεώρησής τους (π.χ., τα κριτήρια μιας 'καλής' στρατηγικής ανάπτυξης μιας πόλης δεν είναι μόνο πληθυσμιακά/ οικονομικά, δηλαδή, μόνο αριθμητικά).

Ειδικότερα, οι βασικότερες δυσκολίες των μαθητών που καταγράφονται στις σχετικές έρευνες ανά σύνολο αριθμών έχουν ως ακολούθως:

**(α)** Φυσικοί αριθμοί

Παρά το γεγονός ότι οι φυσικοί αριθμοί καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος του ΠΣ της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, οι σχετικές έρευνες συνεχίζουν να καταγράφουν δυσκολίες των μαθητών στην ανάπτυξη της αίσθησης του φυσικού αριθμού, οι κυριότερες από τις οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

*Κατανόηση της αξίας των ψηφίων*: Αρκετοί μαθητές αδυνατούν να διαχειριστούν με σαφήνεια το θέμα της θεσιακής αξίας των ψηφίων, ακόμη και στην αρχή της φοίτησής τους στο Γυμνάσιο, γεγονός που ενδεχομένως να τους δυσκολεύει στην εκτέλεση πράξεων με φυσικούς αριθμούς. Η σχετική βιβλιογραφία προτείνει την αξιοποίηση δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης αριθμών από τις πρώτες κιόλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.

*Δομικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών*: Για να μπορέσει ο μαθητής να εκτιμήσει τις δομικές ιδιότητες των αριθμών, θα πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται τους αριθμούς ως αυθύπαρκτες οντότητες, ανεξάρτητες από το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζονται. Η έρευνα δείχνει ότι τα πρώτα βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση εντοπίζονται από την ηλικία των 6 χρόνων. Ωστόσο, η γενίκευση αυτών των ιδιοτήτων δεν αναμένεται πριν την ηλικία των 9 χρόνων. Προς το τέλος της φοίτησής τους στο Δημοτικό Σχολείο, οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση τουλάχιστον να αναγνωρίζουν και να αποδέχονται τις παραπάνω ιδιότητες. Ωστόσο, αυτό δε συμβαίνει για όλους τους μαθητές.

*Υπολογιστικές διαδικασίες (αλγόριθμοι εκτέλεσης μιας πράξης):* Πολλοί ερευνητές σημειώνουν επικριτικά την έμφαση της διδασκαλίας στους αλγόριθμους εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων για δύο λόγους. Ο πρώτος σχετίζεται με τον κίνδυνο ταύτισης του αλγόριθμου με την έννοια της πράξης. Ο δεύτερος λόγος αφορά τη συμβολή αυτής της έμφασης στη διαμόρφωση της αντίληψης από τους μαθητές ότι οι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι αποτελούν και τη μοναδική τους επιλογή στην εκτέλεση μιας πράξης. Επιπλέον, το γεγονός ότι οι αλγόριθμοι αυτοί διδάσκονται συνήθως ως ένα σύνολο κανόνων, χωρίς πάντοτε σαφή αιτιολογία και επεξήγηση και χωρίς να συνδέονται με την προηγούμενη αριθμητική γνώση των μαθητών, αντί να ενθαρρύνει την ουσιαστική κατανόηση του αριθμητικού συστήματος, ευνοεί την αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι μια συλλογή μυστηριωδών και αυθαίρετων, στην πλειοψηφία τους, κανόνων. Ως αποτέλεσμα, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να παρακολουθήσουν τη λογική αυτών των διαδικασιών και στην καλύτερη περίπτωση τις υιοθετούν με μηχανικό τρόπο, υπονομεύοντας τη περαιτέρω εξέλιξή τους στα μαθηματικά.

*Επίλυση προβλημάτων με τις τέσσερις πράξεις (νόημα και δομή)*: Η πλειονότητα των μαθητών ηλικίας 12 – 15 χρόνων μπορούν να επιλύσουν απλά προβλήματα που αφορούν σε μία από τις τέσσερις πράξεις. Ωστόσο, η έρευνα δείχνει ότι αυτό δεν συμβαίνει για πιο σύνθετα προβλήματα, κυρίως εξαιτίας της αδυναμίας πολλών μαθητών να κατανοήσουν και να αναπαραστήσουν τις σχέσεις που αποτυπώνονται στο σενάριο του προβλήματος, καθώς και της περιορισμένης κατανόησης των ίδιων των πράξεων. Η διδασκαλία καλείται να συμβάλλει στη βελτίωση της υπάρχουσας κατάστασης, παρέχοντας συνεχείς και ποικίλες εμπειρίες προβλημάτων και μεθοδολογίας επίλυσής τους από τους μαθητές.

**(β)** Κλασματικοί αριθμοί

Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση και τον αποτελεσματικό χειρισμό των κλασμάτων, καθώς δεν αντιλαμβάνονται την αφηρημένη φύση τους, την ποικιλία των ερμηνειών τους, την ιδιαίτερη γλώσσα που χρησιμοποιείται στη μελέτη τους και τους αλγόριθμους που απαιτεί η αριθμητική τους.

*Η έννοια του κλασματικού αριθμού*: Στη βιβλιογραφία αναφέρονται τέσσερις διακριτές ερμηνείες του κλάσματος (ως μέρος εμβαδού κάποιου χωρίου, ως υποσύνολο ενός συνόλου, ως αποτέλεσμα διαίρεσης και ως σημείο της αριθμογραμμής), οι οποίες δυσκολεύουν πολλούς μαθητές, ακόμη και πέραν της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Οι δυσκολίες αυτές είναι μεγαλύτερες για την ερμηνεία του κλάσματος ως υποσυνόλου και ακόμη περισσότερο για αυτήν ως σημείου της αριθμογραμμής.

*Ισοδυναμία Κλασμάτων*: Οι επιδόσεις των μαθητών σε απλές ερωτήσεις ισοδυναμίας κλασμάτων εμφανίζονται σε ικανοποιητικά επίπεδα στην ερευνητική βιβλιογραφία. Ωστόσο, μειώνονται δραματικά σε συνθετότερες, σχετικές δραστηριότητες, ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως σημείου της αριθμογραμμής προσφέρεται περισσότερο για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία της ισοδυναμίας κλασμάτων.

*Πράξεις με κλασματικούς αριθμούς*: Πολλοί μαθητές συναντούν δυσκολίες στις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς, ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι δυσκολίες αυτές συνδέονται τόσο με τις αντίστοιχες που αφορούν στις ερμηνείες του κλάσματος και στην ισοδυναμία κλασμάτων, όσο και με τους πολύπλοκους κανόνες που διέπουν τους αλγόριθμους εκτέλεσης των συγκεκριμένων πράξεων. Επειδή οι κανόνες αυτοί μαθαίνονται συνήθως «από μνήμης», άλλοτε χρησιμοποιούνται μηχανικά και άλλοτε παραποιούνται και εφαρμόζονται λανθασμένα.

**(γ)** Δεκαδικοί αριθμοί

Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών ακολουθεί συνήθως τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών, καθώς τα δύο συστήματα αναπαράστασης εμφανίζονται να συνδέονται μεταξύ τους και η κατανόηση των κλασμάτων τίθεται ως προϋπόθεση για την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών. Ωστόσο, μερικοί ερευνητές υποστηρίζουν πως δεν υπάρχουν κάποιοι ιδιαίτεροι λόγοι που να αποκλείουν την αντιστροφή της σειράς διδασκαλίας των δύο αυτών ενοτήτων.

*Οι διαφορετικές ερμηνείες των δεκαδικών αριθμών:* Η ποικιλότητα της ερμηνείας των δεκαδικών αριθμών φαίνεται να αποτελεί έναν από τους λόγους των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους δεκαδικούς αριθμούς. Όπως ένα κλάσμα, έτσι και ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να ερμηνευτεί ως εμβαδόν χωρίου, υποσύνολο, αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης και ως σημείο στην αριθμογραμμή.

*Ο ρόλος της υποδιαστολής:* Πολύ σημαντικές δυσκολίες φαίνεται να δημιουργεί στους μαθητές η υποδιαστολή, την οποία συχνά οι μαθητές ερμηνεύουν ως σημείο διαχωρισμού ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς αριθμούς ή την αγνοούν.

*Ισοδυναμία δεκαδικών αριθμών*: Αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ισοδυναμίες του τύπου 0,35 ή 3 δέκατα και 5 εκατοστά ή 35 εκατοστά ή 7 φορές τα 5 εκατοστά κ.λπ. Δεν είναι λίγες ακόμη οι φορές που δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι το 0 στο τέλος κάποιου δεκαδικού αριθμού δεν παίζει κάποιο ρόλο. Άλλοι, πάλι, μαθητές μπερδεύονται και διαγράφουν το μηδενικό, ακόμη και όταν αυτό βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ψηφία.

*Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς*: Δυσκολίες εμφανίζονται και στις τέσσερις πράξεις αλλά, ιδιαίτερα, στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με δεκαδικούς αριθμούς, οι οποίες δεν είναι εύκολο να γίνουν αντιληπτές ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και μοιρασιά αντίστοιχα, όπως στους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, είναι πολύ δύσκολο για ένα μαθητή να αντιληφθεί τι σημαίνει «ο αριθμός 5,23 να επαναληφθεί 0,3 φορές». Επιπλέον, πολλά παιδιά μπορεί να δυσκολεύονται σε αυτές τις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, επειδή παραμένουν προσκολημμένα σε αντιλήψεις, όπως «ο πολλαπλασιασμός αυξάνει έναν αριθμό, ενώ η διαίρεση το μειώνει», που ισχύει πάντοτε στους φυσικούς, αλλά όχι στους δεκαδικούς αριθμούς.

**(δ)** Ακέραιοι αριθμοί

Η κατανόηση των ακεραίων αριθμών και των πράξεων με ακεραίους αριθμούς είναι σημαντική για τη μελέτη των αλγεβρικών ιδεών. Παρόλα αυτά, η σχετική έρευνα για τους μαθητές του ΔημοΤικού Σχολείου είναι πολύ περιορισμένη.

Γενικά, οι διδακτικές προσεγγίσεις που ακολουθούνται στη διδασκαλία των ακεραίων αριθμών μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες: σε αυτές που χειρίζονται τους ακεραίους ως αφηρημένες οντότητες και σε αυτές που χρησιμοποιούν συγκεκριμένα μοντέλα για να προσδώσουν νόημα στους ακεραίους και στις πράξεις με αυτούς. Τα πορίσματα των ερευνών και για τις δύο προσεγγίσεις δεν είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά. Σήμερα επικρατεί η άποψη της αξιοποίησης πολλαπλών μοντέλων για τη διδασκαλία των πράξεων με ακεραίους αριθμούς, όπου οι τελευταίοι παρουσιάζονται ως συγκεκριμένα αντικείμενα ή οντότητες, οι οποίες κατασκευάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι θετικοί ακέραιοι να «ακυρώνουν» τους αρνητικούς. Παραδείγματα τέτοιων οντοτήτων και αντικειμένων είναι οι έννοιες της πίστωσης και του χρέους και μάρκες ή πούλια ή κάρτες μοναδιαίας αξίας και διαφορετικών χρωμάτων (π.χ. τα μαύρα (θετικοί) και κόκκινα πούλια (αρνητικοί) αντιστοίχως). Επίσης, μια πρώτη διαισθητική αντιμετώπιση των ακεραίων εισάγεται από τις μικρές ηλικίες καθώς οι μικροί μαθητές χειρίζονται καθημερινές καταστάσεις που χρησιμοποιούν ακεραίους (π.χ. το θερμόμετρο, το ασανσέρ κ.λπ.)

Αναφορικά με τις πράξεις, τα δεδομένα της έρευνας προτείνουν ότι η πρόσθεση με ακεραίους δεν παρουσιάζει ιδιαίτερα προβλήματα, ίσως γιατί μπορεί να μοντελοποιηθεί και να κατανοηθεί με σχετική ευκολία. Ο πολλαπλασιασμός είναι πιο δύσκολο να εξηγηθεί, αλλά οι κανόνες που τον διέπουν μπορούν να απομνημονευτούν και να εφαρμοστούν με ευκολία. Ωστόσο, η μοντελοποίηση της αφαίρεσης ακεραίων είναι πιο σύνθετη και οι κανόνες της μπορούν εύκολα να δημιουργήσουν σύγχυση και να εφαρμοστούν λανθασμένα.

**(ε)** Πραγματικοί αριθμοί

Η έρευνα είναι πιο περιορισμένη αναφορικά με τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης ανταποκρίνονται στις νοητικές διεργασίες που απαιτούνται για την επιτυχή ανάπτυξη των ρητών και γενικά των πραγματικών αριθμών, σε σύγκριση με τους υπόλοιπους αριθμούς, με αποτέλεσμα να μην είναι εύκολη η ανίχνευση συγκλίσεων ή ενός κεντρικού προσανατολισμού στα σχετικά ευρήματα.

Στην ηλικιακή ομάδα 8-12 ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να ενθαρρύνει τον μαθητή να κατανοήσει την *έννοια της πράξης* και να τη διακρίνει από *τον αλγόριθμο της εκτέλεσής της*. Επίσης, είναι σημαντικό, στο πλαίσιο της διδασκαλίας, να επιτρέπει να αναδειχτούν οι διαφορετικές επιλογές που μπορεί να προκύψουν κατά την εκτέλεση μιας πράξης, να αιτιολογηθούν και να συνδεθούν με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών, ώστε να οδηγήσουν προοδευτικά στην ουσιαστική κατανόηση του αριθμητικού συστήματος.

Η διδασκαλία των αλγόριθμων εκτέλεσης των πράξεων με φυσικούς αριθμούς πραγματοποιείται σε ένα πρώιμο στάδιο, όταν η αντίληψη της έννοιας του αριθμού, της αναπαράστασής του με συμβολικό τρόπο, καθώς και των εννοιών των πράξεων και των ιδιοτήτων τους (π.χ., της προσεταιριστικότητας) από τους μαθητές είναι ακόμη αρκετά περιορισμένη. Επιπλέον, το γεγονός ότι οι αριθμητικές πράξεις είναι το αποτέλεσμα μιας σειράς σύνθετων και εκτενών διαδικασιών δυσκολεύει την πρόσβαση του μαθητή στη μαθηματική γνώση που εμπλέκεται σε αυτές τις διαδικασίες. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να ακολουθήσουν τη λογική αυτών των διαδικασιών και, στην καλύτερη περίπτωση, τις υιοθετούν με μηχανικό τρόπο. Αυτή η μηχανιστική προσέγγιση συμβάλλει ελάχιστα στην περαιτέρω ανάπτυξη των αριθμητικών τους γνώσεων και, ειδικότερα, αυτών που σχετίζονται με την αξιοποίηση ανάλογων τεχνικών, ενώ συχνά προκαλεί αρνητικά συναισθήματα για τα μαθηματικά.

Μια πολλαπλώς τεκμηριωμένη δυσκολία των μαθητών στα μαθηματικά αφορά στην αδυναμία τους να 'μεταφέρουν' τις γνώσεις που αποκτούν εντός ενός ορισμένου πλαισίου σε ένα άλλο. Η αναγνώριση αυτής της δυσκολίας οδήγησε τη διδασκαλία προς την κατεύθυνση της αξιοποίησης καταστάσεων σχετικών με τα ενδιαφέροντα των μαθητών, οι οποίες έχουν νόημα για αυτούς. Ωστόσο, όπως γρήγορα διαπιστώθηκε, οι καταστάσεις αυτές αφενός δεν ήταν 'ρεαλιστικές' (π.χ., ένα ρεαλιστικό πρόβλημα δεν έχει απαραίτητα μία και μοναδική λύση) και αφετέρου, αποτελούσαν απλό πρόσχημα για την εκτέλεση κλασικών μαθηματικών διαδικασιών. Κάτι ανάλογο συνέβη και με την αξιοποίηση διαθεματικών δραστηριοτήτων, όπου συχνά τα μαθηματικά επιβάλλονταν με τεχνητό τρόπο, ενώ, ταυτόχρονα, δεν ήταν σαφές πώς μέσω αυτών θα μπορούσε ο μαθητής να αναπτύξει ένα καλά δομημένο σώμα μαθηματικών γνώσεων. Αναγνωρίζοντας τους παραπάνω περιορισμούς, οι σύγχρονες αντιλήψεις προτείνουν την εστίαση σε στρατηγικές διεργασίες που καθορίζουν τη μαθηματική γνώση που θα αξιοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων και σε μια παιδαγωγική που ενθαρρύνει την από κοινού εργασία, τα ανοιχτά έργα, την αναζήτηση μαθηματικών εφαρμογών, αλλά και δεσμών μεταξύ μαθηματικών ιδεών και διαφορετικών περιστάσεων.

### 1.1.4 Ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες διδακτικής διαχείρισης /ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη για το υπο-πεδίο «Αριθμός»

Ο εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να προσφέρει στα παιδιά πολλές ευκαιρίες να *χειριστούν* υλικό ώστε να «κατασκευάσουν» την έννοια του αριθμού, να *διατυπώσουν* με λόγια τις σκέψεις και τις ενέργειές τους, αλλά και να *εμπλακούν* σε πραγματικές καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων και ανάπτυξης στρατηγικών. Μέσα από αυτές τις δράσεις, στις οποίες τα παιδιά θα εμπλακούν *με το σώμα και το μυαλό τους*, θα αναγνωρίσουν και θα καταμετρήσουν ποσότητες, θα συγκρίνουν και θα διακρίνουν σχέσεις ανάμεσα σε αριθμούς, θα ομαδοποιήσουν και θα μοιράσουν αντικείμενα.

Ο εκπαιδευτικός καλείται να διακρίνει και να προτείνει με συστηματικότητα έργα που προσεγγίζουν διαφορετικές όψεις των αριθμών και εμπλέκονται σε διαφορετικές αριθμητικές δραστηριότητες και να μην περιορισθεί σε απλές καταστάσεις αρίθμησης ή ένα προς ένα καταμέτρησης. Συστηματική ενασχόληση με τις αναγνωρίσεις δεκάδων και των μεταξύ τους σχέσεων, ανάπτυξη στρατηγικών μέτρησης, μελέτη της αριθμητικής γραμμής και ανάπτυξη εκτιμήσεων και νοερών υπολογισμών θα βοηθήσουν τους μαθητές να βάλουν σίγουρα θεμέλια στην αριθμητική εξέλιξη. Είναι, επίσης, σημαντικό να τονιστεί ότι οι δράσεις στις οποίες τα παιδιά θα κληθούν να εμπλακούν χρειάζεται να είναι προσεκτικά επιλεγμένες ώστε να είναι κοντά στα ενδιαφέροντά τους, καθώς και να είναι 'προκλητικές' ώστε να βοηθούν τα παιδιά να αναπτύσσουν στρατηγικές για να τις διαχειριστούν. Παράλληλα, η χρήση αναπαραστατικού υλικού αναρτημένου μέσα στην τάξη, όπως είναι οι βάσεις των δεκάδων, η εκατοντάδα ή η αριθμητική γραμμή, θα πλουτίσουν τις νοερές αναπαραστάσεις και τις επεξεργασίες των μαθητών και θα στηρίξουν την αριθμητική τους σκέψη.

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΕΡΓΑ (**«Αριθμός»)

**Έργο 1**: Παιχνίδια με αριθμοκάρτες (Α΄ τάξη)

**Χαρακτηριστικά έργου**

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Εικονική, συμβολική αναπαράσταση</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτ/στικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Ενθάρρυνση ανάπτυξης ποικίλων στρατηγικών<br>Ανάπτυξη επιχειρημάτων και τρόπων απόδειξης</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α τάξη Δημοτικού</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Γενικά</td><td></td></tr>
</table>

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές*** | Επίλυση προβλήματος, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας | | Μαθηματική επικοινωνία, Μαθη-ματικός συλλογισμός | | Ενίσχυση επικοινωνίας Ερμηνεία πληροφοριών Επεξήγηση Ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού |
| | | | | ***Προτεινόμενοι πόροι*** | |
| ***Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές*** | Ερμηνεία καταστάσεων στον κοινωνικό βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά | ***Συγκείμενο*** | Παιχνίδι | | |

Χρειάζονται κάρτες με τους αριθμούς από το 0 ως το 9 και, επίσης, αρκετές κάρτες με εικονιζόμενα αντικείμενα ή σχηματισμούς (μέχρι 9 στοιχεία σε διαφορετικές διατάξεις).

**1.** «*Συστήνω τον αριθμό που βρήκα*»

Ο εκπαιδευτικός έχει κρύψει τις κάρτες με τους αριθμούς σε διάφορα σημεία του χώρου. Εξηγεί ότι θα παίξουν «κρυφτό» με τους αριθμούς.

Σε αυτό το σημείο, πριν αρχίσει η αναζήτηση, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να αναφέρουν κάποιους αριθμούς που έχουν χρησιμοποιήσει και σε τι αναφέρονταν (για παράδειγμα, είμαι 6 χρονών, έχω 1 αδελφή, έχω 2 μολύβια κ.λπ.). Μπορεί ο ίδιος να πει ένα σύντομο παράδειγμα για τον εαυτό του, αν δεν ξεκινήσει κανένα παιδί.

Ξεκινώντας το παιχνίδι, ο εκπαιδευτικός διευκρινίζει ότι οι αριθμοί έχουν «κρυφτεί» και τα παιδιά χωρισμένα σε ομάδες ψάχνουν να τους βρουν. Όποιον αριθμό βρει η κάθε ομάδα οφείλει να τον παρουσιάσει, λέγοντας ό,τι ξέρει και ό,τι μπορεί να φανταστεί γι' αυτόν. Κερδίζει η ομάδα που κάνει την καλύτερη παρουσίαση όλων των αριθμών που βρήκε.

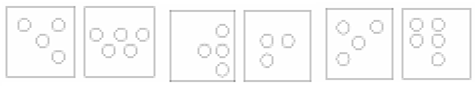
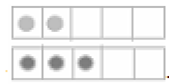
Μια ενδιαφέρουσα λεπτομέρεια είναι ότι μπορεί οι αριθμοί να έχουν «κρυφτεί» σε σημεία που να έχουν τοποθετηθεί (ή να υπάρχουν από κατασκευής) ίσης ποσότητας αντικείμενα (για παράδειγμα, ο αριθμός 5 σε ένα κουτί κοντά στις 5 κρεμάστρες της τάξης), εφόσον αυτό είναι εφικτό.

Εναλλακτικά, μπορούν να συνδυάζονται οι αριθμοκάρτες με κάρτες που απεικονίζουν αντικείμενα.

**2.** *«Παιχνίδι γρήγορης αναγνώρισης»*

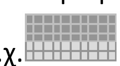
Ως συνέχεια του προηγούμενου παιχνιδιού ή ως αυτόνομο παιχνίδι, τα παιδιά μπορεί να εμπλακούν σε δραστηριότητες άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων. Τέτοιες δραστηριότητες μπορούν να πραγματοποιηθούν με διαφορετικά υλικά και σχηματισμούς, με εκκίνηση από πραγματικά αντικείμενα (φασόλια, μπίλιες ή μάρκες, ξυλάκια, σχήματα ή κύβους) και μεταφορά σε εικονιστικό υλικό με βούλες, τετράγωνα και τετραγωνισμένο χαρτί.

Το πιο σημαντικό στοιχείο στην προσέγγιση που υιοθείται στις δραστηριότητες είναι οι μορφές των αναπαραστάσεων να είναι τέτοιες ώστε τα παιδιά να αναπτύξουν δυναμικές εικόνες για τους ‘αριθμούς’, τις οποίες να μπορούν να οργανώνουν με ευελιξία και να μην εγκλωβιστούν σε μια αναπαράσταση (όπως, για παράδειγμα, αυτήν του ζαριού).

 ή 

Το παιχνίδι που περιγράφεται μπορεί να συνεχιστεί με την ίδια δομή με άλλο υλικό ή άλλο πλαίσιο μέχρι τα παιδιά να πετύχουν άνετη άμεση αναγνώριση ποσοτήτων. Η χρήση των αριθμητικών λέξεων συνδέει ποσότητες και αριθμούς. Για παράδειγμα, αν πούμε να βρούμε όλα τα 3 ή αν δείξουμε το σύμβολο, τα παιδιά καλούνται να συνδέσουν τα στοιχεία αυτά με τις σχετικές ποσότητες.

Εναλλακτικά, τα παιδιά μπορούν να χωριστούν σε ομάδες διαφορετικών δυνατοτήτων. Οι κάρτες με τους σχηματισμούς είναι σκορπισμένες στο πάτωμα. Οι ομάδες προσπαθούν να βρουν όσες από τις κάρτες έχουν την ποσότητα που άκουσαν με το σύνθημα του εκπαιδευτικού σε χρόνο περιορισμένο. Κερδίζει η ομάδα που θα βρει τις περισσότερες κάρτες.

Οι δραστηριότητες στην αρχή της αναγνώρισης αφορούν αριθμούς μέχρι το 10 και αργότερα μεγαλύτερες ποσότητες ή και αριθμούς σε δεκάδες (π.χ.  ).

Η τάξη μπορεί να συζητήσει στρατηγικές αναγνώρισης και ακόμη μπορούν οι μαθητές να πάρουν τις κάρτες στις ομάδες και να παίξουν μόνοι τους κάνοντας «προπόνηση», δηλαδή προετοιμασία και εξοικείωση με το υλικό που χρησιμοποιείται.

**Έργο 2:** Φτιάχνω αριθμούς με τις δεκάδες (Β΄ τάξη)

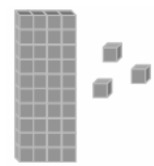
**Χαρακτηριστικά έργου**

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Έννοια της δεκάδας και διαφορετικές αναπαραστάσεις της<br>Αξία θέσης ψηφίου</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτ/στικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Ενθάρρυνση ανάπτυξης ποικίλων στρατηγικών<br>Ενίσχυση επικοινωνίας<br>Ερμηνεία πληροφοριών<br>Επεξήγηση<br>Ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού<br>Αναζήτηση κανόνων και σχέσεων</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Β τάξη Δημοτικού</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Επίλυση προβλήματος, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας</td><td>Γενικά</td><td>Μαθηματική επικοινωνία, Μαθηματικός συλλογισμός</td></tr>
</table>

| | | | | **Προτεινόμενοι πόροι** | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές*** | Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά | ***Συγκείμενο*** | Πρόβλημα | | |

Στο έργο αυτό το ενδιαφέρον στρέφεται στην κατανόηση της δημιουργίας μιας «μονάδας» ανώτερης τάξης (της δεκάδας) και την εδραίωσή της ως συστατικό στη δόμηση του αριθμητικού συστήματος, παράλληλα με τη θεσιακή αξία. Πρόκειται για δράσεις αναγνώρισης και μελέτης της δεκάδας που βοηθούν τα παιδιά, μέσα και από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της (ράβδους και γραμμές), να την αναγνωρίσουν ως μονάδα ανώτερης τάξης. Οι δράσεις αυτές αποτελούν το πρώτο βήμα για αντίστοιχες δραστηριότητες με την επόμενη «μονάδα» ανώτερης τάξης, την εκατοντάδα.

*1η δράση*: Κάνω πακέτα με δέκα: Τα παιδιά εργάζονται σε ομάδες. Η κάθε ομάδα έχει μπροστά της έναν αριθμό από κυβάκια. Ο εκπαιδευτικός ζητάει να φτιάξουν πακετάκια των 10 και να ανακοινώσουν πόσα πακετάκια έχουν και πόσα είναι όλα τα κυβάκια μαζί (βλ. Σχήμα 1).

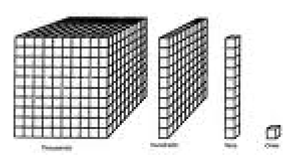


Σχήμα 1

*2η δράση*: Ο εκπαιδευτικός ζητά από τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν «πακέτα» με κυβάκια και να φτιάξουν αριθμούς (αρχικά, ολόκληρες δεκάδες και, στη συνέχεια, να χρησιμοποιήσουν και μεμονωμένα κυβάκια, για να φτιάξουν και άλλους αριθμούς, π.χ. το 43).

*3η δράση*: Ο εκπαιδευτικός αφηγείται μια ιστορία για ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει καραμέλες. Οι καραμέλες μπαίνουν σε σακουλάκια των 10. Ο εκπαιδευτικός προτείνει στους μαθητές να "συσκευάσουν" σε κουτιά διαφορετικές ποσότητες με καραμέλες (διψήφιοι ή τριψήφιοι αριθμοί).

Οι μαθητές χρησιμοποιούν υλικό (π.χ. χάντρες σε σακουλάκια) ή κυβάκια ή κύβους Dienes για να αναπαραστήσουν τις ποσότητες που "συσκευάζουν". Οι κύβοι Dienes εξυπηρετούν τον σχηματισμό των εκατοντάδων (Σχήμα 2). Κατόπιν, γράφουν τις ποσότητες σε χαρτάκια και τις διατάσσουν στην αριθμογραμμή.



Σχήμα 2

Εναλλακτικά, για τους διψήφιους αριθμούς μπορούν να χρησιμοποιηθούν χάρτινες ράβδοι Cuisenaire.

Είναι καλό να έχουν προηγηθεί ανάλογες *δραστηριότητες* με πραγματικά αντικείμενα (όπως η παρακάτω με κουμπιά), όπου ο εκπαιδευτικός θα έχει προτρέψει τα παιδιά να φτιάξουν ομάδες με τα αντικείμενα (αφού αποφασίσουν τα ίδια τα παιδιά πόσα αντικείμενα θα έχει η κάθε ομάδα).

**Έργο 3:** Εργασία με πλέγματα (Δ΄ τάξη)

**Χαρακτηριστικά έργου**

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Εμπειρίες κατανόησης της έννοιας του φυσικού αριθμού και των πράξεων με φυσικούς αριθμούς</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτ/στικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Ενθάρρυνση ανάπτυξης ποικίλων στρατηγικών<br>Ανάπτυξη επιχειρημάτων και τρόπων απόδειξης<br>Ενίσχυση επικοινωνίας<br>Ερμηνεία πληροφοριών<br>Επεξήγηση<br>Ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού<br>Αναζήτηση κανόνων και σχέσεων</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α τάξη Δημοτικού</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Επίλυση προβλήματος, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Μαθηματική επικοινωνία, Μαθη-ματικός συλλογισμός</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Παιχνίδι</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Οι πίνακες/ τα πλέγματα αριθμών μπορούν να προσφέρουν ευκαιρίες για ενδιαφέρουσες εμπειρίες κατανόησης της έννοιας του φυσικού αριθμού και των πράξεων με φυσικούς αριθμούς.

Σε αυτήν την προοπτική, προτείνεται η χρήση σεναρίων δραστηριοτήτων με ‘σύννεφα’ και ‘σταγόνες’ που κρύβουν μια μικρή, αρχικά, και μεγαλύτερη, αργότερα, περιοχή του πλέγματος αριθμών.

## 1.2 ΑΛΓΕΒΡΑ

### 1.2.1 Σημασία του υπο-πεδίου «Άλγεβρα»

Από τη δεκεατεία του 1990 και στη συνέχεια η κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει στρέψει το ενδιαφέρον της από την τυπική εκμάθηση μαθηματικών εννοιών στη δυναμική προσέγγιση των τρόπων με τους οποίους δημιουργούνται και λειτουργούν τα ίδια τα Μαθηματικά. Στην κατεύθυνση αυτή, υποστηρίζει πως οι μαθητές, από τις μικρότερες ηλικίες, είναι σημαντικό να αναπτύξουν γνώσεις, δεξιότητες και ικανότητες συστηματικής οργάνωσης, αρχικά συγκεκριμένων και πρακτικών καταστάσεων και αργότερα πιο αφηρημένων γεωμετρικών ή αριθμητικών καταστάσεων, στην προοπτική της αναγνώρισης κοινών ή επαναλαμβανόμενων χαρακτηριστικών. Ιδιαίτερα η μελέτη των κανονικοτήτων είναι εξαιρετικά σημαντική για να αρχίσουν οι μαθητές να διακρίνουν σχέσεις, να προβλέπουν εξελίξεις ή αποτελέσματα και να οδηγούνται σε γενικεύσεις.

Η εισαγωγή στην αλγεβρική σκέψη περιλαμβάνει δράσεις όπως η αναγνώριση, η συμπλήρωση, η περιγραφή, η γενίκευση γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων, η αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων (λεκτικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.

Η εισαγωγή των μαθητών στα αλγεβρικά στοιχεία της μαθηματικής επιστήμης, ειδικά στις μικρές τάξεις, είναι αναγκαίο να αξιοποιούν δραστηριότητες που αναδεικνύουν τις αλγεβρικές έννοιες (κανονικότητα, συνάρτηση, ισότητα, ανισότητα) μέσα από τη διερεύνηση καταστάσεων της πραγματικής ζωής, ώστε να φτάσουν σταδιακά στη γενίκευση. Τέλος, είναι απαραίτητο να δίνεται έμφαση σε έργα που καλούν τα παιδιά να προβλέψουν τη συνέχεια, να περιγράψουν την κανονικότητα και να εκφράσουν τις ιδέες τους λεκτικά αλλά και με άλλα μέσα (φυσικά αντικείμενα, εικόνες, διαγράμματα, σύμβολα).

### 1.2.2 Ανάπτυξη των ΠΜΑ στο υπο-πεδίο «Άλγεβρα»

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει το μαθηματικό περιεχόμενο των ΠΜΑ που αφορούν τον αλγεβρικό λογισμό στο Δημοτικό Σχολείο στο νέο ΠΣ, καθώς και την οργάνωση και κατανομή τους κατά θεματική ενότητα και υπο-ενότητα.

| Υπο-πεδίο | Θεματικές ενότητες | Θεματικές υπο-ενότητες |
|---|---|---|
| ΑΛΓΕΒΡΑ | **Κανονικότητες** | *Αναγνώριση* |
| | | *Αναπαράσταση* |
| | | *Μελέτη (εύρεση κανόνα και όρων, διερεύνηση)* |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* |
| | **Συναρτήσεις** | *Αντιστοίχιση - συμμεταβολή* |
| | | *Αναπαράσταση* |
| | | *Ιδιότητες* |
| | | *Πράξεις-Σχέσεις* |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* |
| | **Αλγεβρικές παραστάσεις** | *Το γράμμα ως γενικευμένος αριθμός (άγνωστος, σταθερά, μεταβλητή)* |
| | | *Τιμή* |
| | | *Δομή* |
| | | *Μετασχηματισμός* |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* |
| | **Αλγεβρικές σχέσεις** | *Ισότητες* |
| | | *Ανισότητες* |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* |
| | **Σύνολα** | *Αναπαράσταση* |
| | | *Σχέσεις και πράξεις* |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* |

Τα ΠΜΑ που αφορούν στην Άλγεβρα στο Δημοτικό Σχολείο αναπτύσσονται σε τέσσερις θεματικές ενότητες: Κανονικότητες, Συναρτήσεις, Αλγεβρική παράσταση, Αλγεβρικές Σχέσεις. Στη συνέχεια, περιγράφονται η πορεία ανάπτυξης των ΠΜΑ ανά θεματική και η εστίαση της μαθησιακής εμπειρίας που προσφέρεται στους μαθητές ανά θεματική ενότητα και τάξη.

**(α)**. *Πορεία ανάπτυξης των ΠΜΑ για τη θεματική ενότητα «Κανονικότητα»*

- Αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή της κανονικότητας και της διαδικασίας παραγωγής της, κατασκευή κανονικοτήτων διαφόρων τύπων.
- Αναπαράσταση κανονικοτήτων με διαφορετικούς τρόπους, μετάβαση από μία αναπαράσταση σε άλλη.
- Εύρεση και συμβολική διατύπωση του γενικού όρου της κανονικότητας.
- Μοντελοποίηση και μελέτη καταστάσεων μέσω κανονικοτήτων.

Βασικός προσανατολισμός της εργασίας που αφορά στις αλγεβρικές ιδέες στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου είναι η μύηση των μαθητών στη διερεύνηση σχέσεων και δομών. Προς αυτήν την κατεύθυνση και σε σχέση με τα μοτίβα, τα μαθηματικά έργα ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να περιγράφουν και να κατασκευάζουν απλές γεωμετρικές, αριθμητικές και άλλες κανονικότητες, πρώτα επαναλαμβανόμενες και κατόπιν αυξανόμενες ή μειούμενες. Στις μεγαλύτερες τάξεις επαναλαμβάνονται τα παραπάνω ανώτερο επίπεδο, καθώς οι αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες είναι σύνθετες. Επιπλέον, η σχετική εργασία των μαθητών περιλαμβάνει γενίκευση της κανονικότητας, αναπαράστασή της με διαφορετικά μέσα (εικονικά, λεκτικά, αριθμητικά), σύγκριση κανονικοτήτων, λεκτική διατύπωση του κανόνα του μοτίβου, εύρεση του επόμενου, αλλά και ενός απομακρυσμένου όρου και, τέλος, συμβολική διατύπωση του γενικού όρου στις αριθμητικές κανονικότητες, χρησιμοποιώντας μεταβλητές (π.χ., ν+2).

**(β)**. *Πορεία ανάπτυξης των ΠΜΑ για τη θεματική ενότητα «Συνάρτηση»*

- Διερεύνηση σχέσεων μεγεθών από την καθημερινή ζωή-συμμεταβαλλόμενα μεγέθη.
- Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης (μεταβλητή, μονοσήμαντη απεικόνιση, αναπαραστάσεις συναρτήσεων, ερμηνεία αναπαραστάσεων).
- Μοντελοποίηση απλών καταστάσεων και απαντήσεις σε ερωτήματα που τις αφορούν μέσω συναρτήσεων.
- Διερεύνηση συγκεκριμένων συναρτήσεων (γραμμικών, της μορφής ψ=α/x, τετραγωνικών και ρυθμού μεταβολής).

Στις μικρές τάξεις του Δημοτικού Σχολείου οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν μεταβολές μεγεθών σε σχέση με άλλα μεγέθη στην καθημερινή ζωή και αντιστοιχίες μέσα από παιχνίδια. Στις μεγαλύτερες τάξεις η έμφαση βρίσκεται στην αισθητοποίηση της σχετικής έννοιας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές συνεχίζουν να διερευνούν καταστάσεις συμμεταβολής: ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, σχέση ανεξάρτητης-εξαρτημένης μεταβλητής και υπολογισμός ενός μεγέθους με αντικατάσταση αριθμού στις μεταβλητές. Τέλος, διερευνούν την έννοια της συνάρτησης μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών.

**(γ)**. *Πορεία ανάπτυξης των ΠΜΑ για τη θεματική ενότητα «Αλγεβρική παράσταση»*

- Ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης (μετασχηματισμός αριθμών, καθώς και απλών αριθμητικών προτάσεων με αξιοποίηση ιδιοτήτων των πράξεων, χρήση συμβόλων σε απλές αριθμητικές προτάσεις, συμβολική έκφραση ενός απλού προβλήματος).
- Διερεύνηση του αλγεβρικού χαρακτήρα της αριθμητικής (μελέτη των ιδιοτήτων των πράξεων, γενίκευση με λεκτική διατύπωση, αξιοποίησή τους για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων).
- Διερεύνηση των διαφορετικών χρήσεων του γράμματος (για την έκφραση μεγεθών, τη γενική διατύπωση ιδιοτήτων πράξεων και δυνάμεων με εκθέτες φυσικούς αριθμούς, ως αγνώστου σε απλές εξισώσεις, ως μεταβλητής στον γενικό όρο μοτίβων και ως παραμέτρου στις συναρτήσεις).
- Διαχείριση αλγεβρικών παραστάσεων (ερμηνεία, δημιουργία, υπολογισμός της αριθμητικής τιμής και απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων).
- Εισαγωγή στον αλγεβρικό λογισμό (δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες, τετραγωνική ρίζα και ιδιότητές τους αντιστοίχως, πράξεις πολυωνύμων, απλές ταυτότητες, παραγοντοποίηση πολυωνύμων).

Στις μικρές τάξεις οι μαθητές συμμετέχουν σε έργα μετασχηματισμού αριθμών για λόγους διευκόλυνσης υπολογισμών (π.χ., 7+9=7+7+2=14+2=16) και διερευνούν τις ιδιότητες των πράξεων και τον ρόλο του «=» σε απλές αριθμητικές παραστάσεις, ‘κλειστές’ (π.χ., □+3=9-2) ή ‘ανοικτές’ (□+□=8). Ακόμη, ενθαρρύνονται να εκφράσουν ένα απλό πρόβλημα με μία αριθμητική παράσταση ή σχέση και το αντίστροφο.

Στις μεγαλύτερες τάξεις τα παραπάνω έργα επαναλαμβάνονται, αλλά οι αριθμητικές παραστάσεις που αξιοποιούνται είναι σύνθετες. Επιπλέον, οι μαθητές διερευνούν τη γενίκευση των ιδιοτήτων των πράξεων και τη διατυπώνουν λεκτικά. Ακόμη, καλούνται να υπολογίσουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων, αρχικά απλών, στη συνέχεια, με παρενθέσεις και αργότερα με δυνάμεις, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων. Επίσης, συζητούν για τη δομή μιας αριθμητικής παράστασης, χρησιμοποιώντας κατάλληλους όρους. Τέλος, χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν μεγέθη σε σχέσεις (από την καθημερινή ζωή και τις επιστήμες), αγνώστους σε απλές εξισώσεις και μεταβλητές στον γενικό όρο μοτίβων και στις συναρτήσεις.

**(δ)**. *Πορεία ανάπτυξης των ΠΜΑ για τη θεματική ενότητα «Αλγεβρικές σχέσεις»*

- Έννοια της ισότητας και οι διαφορετικές χρήσεις του ίσον (=).
- Εξισώσεις πρώτου βαθμού (επίλυση, κατασκευή, μοντελοποίηση).
- Έννοια της ανισότητας και οι διαφορετικές χρήσεις του συμβόλου της.
- Ανισώσεις πρώτου βαθμού (επίλυση, κατασκευή, μοντελοποίηση).

Στις μικρές τάξεις οι μαθητές διερευνούν τις έννοιες της ισότητας και της ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια και χρησιμοποιούν τα αντίστοιχα σύμβολα για να δηλώσουν την κατάλληλη σχέση μεταξύ αριθμών ή απλών αριθμητικών παραστάσεων (συμπεριλαμβάνονται παραστάσεις με σύμβολα που δηλώνουν αγνώστους ή μεταβλητές, π.χ., □+□=8 ή 3+□=9).

Στις μεγαλύτερες τάξεις η εστίαση βρίσκεται στη μελέτη των διαφορετικών χρήσεων του συμβόλου της ισότητας και της ανισότητας. Έτσι, αρχικά, οι μαθητές διατάσσουν αριθμούς από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο και αντιστρόφως (φυσικούς, δεκαδικούς, κλάσματα) και συνδέουν τις ανισοτικές τους σχέσεις με τη θέση τους στην αριθμογραμμή. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν το σύμβολο της ισότητας ή της ανισότητας, για να δηλώσουν τη σχέση μεταξύ αριθμητικών παραστάσεων προοδευτικά μεγαλύτερης πολυπλοκότητας [π.χ., 6-1 … 2+5, 5+(7-4) … (5+7)-4] ή να συμπληρώσουν ισότητες και ανισότητες με τον κατάλληλο αριθμό [π.χ., 6+□<10-1 ή 2(3+4)–5 =□+8]. Ακόμη, μοντελοποιούν προβλήματα με εξισώσεις της μορφής α+x=β, α·x=β, και τις επιλύουν με δοκιμές και με τη χρήση αντίστροφων πράξεων.

### 1.2.3 Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες μαθητών στο υπο-πεδίο «Άλγεβρα»

#### *1.2.3α Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης / σκέψης*

Στο Δημοτικό Σχολείο η Άλγεβρα παρουσιάζεται κατά κανόνα είτε ως γενικευμένη αριθμητική είτε ως μελέτη του αριθμητικού συστήματος και της δομής του, η οποία αναφέρεται σε γενικευμένους αριθμούς, δηλαδή, σε αντιπροσώπους κλάσεων αριθμών. Επιπλέον, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της μεταβολής. Ειδικότερα, οι «κανονικότητες»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ Ευρωπαϊκή Ένωση Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης ΕΣΠΑ 2014-2020 ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

αναπτύσσονται κυρίως στις πρώτες τέσσερις τάξεις του Δημοτικού. Οι μαθητές συμμετέχουν σε δράσεις αναγνώρισης, αναπαράστασης, μελέτης και περιγραφής κανονικοτήτων και αξιοποιούν τις ιδιότητές τους στην επίλυση σχετικών προβλημάτων. Στις συναρτήσεις οι μαθητές αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ συμμεταβαλλόμενων μεγεθών, από τις πρώτες τάξεις, ενώ στην Ε΄ και στην Στ΄ τάξη διερευνούν τη σχέση μεταξύ ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Στη θεματική ενότητα «Αλγεβρική παράσταση» εισάγεται η έννοια της μεταβλητής και οι μαθητές υπολογίζουν την αριθμητική τιμή παραστάσεων και διατυπώνουν προβλήματα που μοντελοποιούνται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση. Στη θεματική ενότητα «Αλγεβρικές Σχέσεις» οι μαθητές, στις πρώτες τάξεις, διερευνούν την έννοια της ισότητας και της ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια, ενώ στην ΣΤ τάξη χρησιμοποιούν γράμματα ως αγνώστους σε απλές εξισώσεις τις οποίες επιλύουν.

Οι μαθητές στο Δημοτικό Σχολείο έχουν ασχοληθεί με κανονικότητες (γεωμετρικά μοτίβα αλλά και ακολουθίες αριθμών) και έχουν φτάσει να διατυπώνουν τον γενικό όρο μιας κανονικότητας (τουλάχιστον λεκτικά). Έχουν ασχοληθεί με φαινόμενα συμμεταβολής μεγεθών (από την καθημερινή ζωή και από τη γεωμετρία) και με προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Επιπλέον, έχουν χρησιμοποιήσει συστήματα συντεταγμένων για τον προσδιορισμό σημείων.

#### *1.2.3β Δυσκολίες μαθητών*

Αρκετές έρευνες έχουν επικεντρωθεί στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα στο Δημοτικό Σχολείο. Τα ευρήματα συχνά αποδίδουν τις δυσκολίες στη βεβιασμένη και εκτεταμένη χρήση αλγεβρικών συμβόλων που οδηγεί πολλούς μαθητές να ταυτίζουν την άλγεβρα με σύμβολα και συμβολικούς χειρισμούς. Μια άλλη πηγή προβλημάτων αποτελεί η γλώσσα που χρησιμοποιείται στην άλγεβρα. Είναι σημαντικό να δοθεί χρόνος στους μαθητές, από τις πρώτες κιόλας τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να εξοικειωθούν με τις θεμελιώδεις διαδικασίες της αναγνώρισης κανονικοτήτων και σχέσεων, οι οποίες θα αποτελέσουν το κατάλληλο υπόβαθρο για τη συστηματική μελέτη των αλγεβρικών ιδεών.

Δυσκολίες μαθητών εντοπίζονται και αναφορικά με την κατανόηση των συμβόλων της ισότητας και της ανισότητας, καθώς και της επίλυσης προβλημάτων του τύπου «βρες τον αριθμό που λείπει» (για παράδειγμα, ένα συχνό λάθος που έχει καταγραφεί σε αυτού του τύπου τις καταστάσεις είναι $3 + \square = 7$, κάτι που υποδεικνύει την εστίαση στο σύμβολο + και τη μη κατανόηση της έννοιας της ισότητας).

### 1.2.4 Ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες διδακτικής διαχείρισης /ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη

Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να προσφέρει στους μαθητές πληθώρα ευκαιριών χειρισμού υλικού ώστε να «κατασκευάσουν» τις αλγεβρικές ιδέες, αλλά και να εμπλακούν σε πραγματικές καταστάσεις επίλυσης προβλήματος και ανάπτυξης στρατηγικών.

Η μελέτη των κανονικοτήτων, όπως και η μελέτη των συναρτήσεων και, γενικά, των αλγεβρικών ιδεών, περιλαμβάνει τη συμμετοχή των μαθητών σε *καταστάσεις αναζήτησης* γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων και σχέσεων *στο περιβάλλον και στην καθημερινή ζωή*. Οι μαθητές αρχικά ενθαρρύονται να αναγνωρίσουν τις καταστάσεις, να τις περιγράψουν, προφορικά και συμβολικά, και να τις συνεχίσουν.

Σε επόμενο στάδιο καλούνται να *κατασκευάζουν* δικά τους επαναλαμβανόμενα μοτίβα με *χρήση χειραπτικού και αναπαραστατικού υλικού.* Όταν οι μαθητές κατασκευάζουν κανονικότητες με «φυσικά» υλικά (σχήματα, κυβάκια, χάντρες, κουμπιά, σφηνοτουβλάκια), έχουν τη δυνατότητα να δοκιμάσουν και να κάνουν αλλαγές με τη μορφή παιχνιδιού, δοκιμάζοντας διαφορετικές περιπτώσεις τις οποίες στη συνέχεια μπορούν να σχεδιάσουν. Είναι σημαντικό οι μαθητές να αξιοποιήσουν αυτή τη γνώση για να οδηγηθούν σε προβλέψεις και γενικεύσεις. Ένα σημαντικό στοιχείο που ενσωματώνεται στα σχετικά μαθηματικά έργα είναι η διατύπωση με λόγια και η επεξήγηση των παρατηρήσεων από τους μαθητές για τις κανονικότητες και τις σχέσεις των στοιχείων.

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΕΡΓΑ (**«Άλγεβρα»)

**Έργο 1:** Ιδέες για επαναλαμβανόμενα μοτίβα (Α΄τάξη)

**Χαρακτηριστικά έργου**

| **ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ** | | **ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ** | | **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ** | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Πεδίο*** | Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση | ***Ειδικά*** | Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες | ***Προτεινόμενα χαρακτ/στικά της διδακτικής προσέγγισης*** | Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους |
| ***Ενότητα*** | Κανονικότητες | | | | |
| ***Μεγάλες Ιδέες*** | Μαθηματική δομή | | | | |
| ***Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές*** | Πρακτική συλλογισμού και επιχειρηματολογίας Πρακτική επίλυσης προβλήματος | ***Γενικά*** | Μαθηματική επικοινωνία | ***Προτεινόμενοι πόροι*** | |
| ***Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές*** | | ***Συγκείμενο*** | Παιχνίδι | | |

**1.** *Δημιουργία ρυθμού στην τάξη, χρησιμοποιώντας απλά (ή και αυτοσχέδια) μουσικά όργανα.*

Κάθε μαθητής που κρατά ένα μουσικό όργανο προκαλεί τον αντίστοιχο ήχο με μια (προκαθορισμένη ή αυθόρμητη) σειρά. Όταν δημιουργηθεί ο επιθυμητός ρυθμός, οι μαθητές καλούνται να 'καταγράψουν' το «τραγούδι» που έφτιαξαν ώστε να μπορούν να το αναπαράγουν την επόμενη ημέρα ή να το δώσουν σε μια άλλη τάξη. Οι μαθητές είτε θα καταγράψουν το επαναλαμβανόμενο μοτίβο, ζωγραφίζοντας τα όργανα με τη σειρά ή θα κολλήσουν σε ένα χαρτί εικονίδια με το κάθε όργανο (που θα έχει προβλέψει να φέρει ο εκπαιδευτικός).

**2.** *Δημιουργία επαναλαμβανόμενου μοτίβου με υλικά (χάντρες, κουμπιά, γεωμετρικά σχήματα)*

Τα παιδιά μπορούν να αντιγράψουν και να συνεχίσουν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο από τα προτεινόμενα από τον εκπαιδευτικό. Σε δεύτερη φάση, κάθε ομάδα μπορεί να δημιουργήσει ένα δικό της μοτίβο και να εξηγήσει (χωρίς να το δείξει) στις άλλες ομάδες από ποια στοιχεία αποτελείται το μοτίβο αυτό, ώστε κάθε ομάδα να προσπαθήσει να το αντιγράψει.

Το τεχνολογικό περιβάλλον «ColorPatterns» (διαδικτυακός τόπος http://nlvm.usu.edu) προσφέρει ιδέες για επαναλαμβανόμενα μοτίβα διαφόρων χρωμάτων χαντρών. Οι μαθητές αναγνωρίζουν, περιγράφουν και επεκτείνουν το μοτίβο που κάθε φορά εμφανίζεται.

Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να ασχοληθούν ατομικά ή ομαδικά με τα έργα που προτείνονται, να αναγνωρίσουν, να περιγράψουν, να επεκτείνουν το μοτίβο και να ελέγξουν την ορθότητα της απάντησής τους.

**Έργο 2:** Ιδέες για κατασκευή, καταγραφή και περιγραφή δεδομένων συμμεταβολής (Β΄τάξη)
**Χαρακτηριστικά έργου**

| ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ | | ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ | | ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Πεδίο*** | Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση | ***Ειδικά*** | Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή | ***Προτεινόμενα χαρακτ/στικά της διδακτικής προσέγγισης*** | Ποικιλία προσεγγίσεων / στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους |
| ***Ενότητα*** | Συνάρτηση | | | | |
| ***Μεγάλες Ιδέες*** | Μαθηματική δομή | | | | |
| ***Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές*** | Πρακτική μαθηματικής επικοινωνίας | ***Γενικά*** | Μαθηματική επικοινωνία | | |
| ***Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές*** | | | | ***Προτεινόμενοι πόροι*** | |
| | | ***Συγκείμενο*** | Πρόβλημα | | |

1. Ο εκπαιδευτικός φέρνει στην τάξη ένα κουτί με τετραγωνάκια, πλαστικά ή χάρτινα (καλύτερα να είναι μεγαλύτερα από 2εκ. x 2εκ., για να μπορούν να τα χειριστούν οι μαθητές με ευκολία). Μοιράζει σε κάθε ομάδα 4 τετραγωνάκια.

Ζητά από τα παιδιά να τα συνδυάσουν έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα μεγάλο τετράγωνο. Στη συνέχεια, ζητά να σκεφτούν στην ομάδα τους και να πάρουν από το κουτί όσα τετραγωνάκια νομίζουν ότι χρειάζονται για να φτιάξουν ένα άλλο τετράγωνο που να είναι «λίγο» μεγαλύτερο από το προηγούμενο.

Ακολούθως, τους καλεί να συζητήσουν με βάση τη διαπίστωση ότι για να «γεμίσουν» το πρώτο τετράγωνο χρειάζονται 4 μικρά τετραγωνάκια. Για να γεμίσουν το δεύτερο τετράγωνο χρειάζονται 9 τετραγωνάκια. Αν προσθέσουν στην άκρη ακόμα ένα τετραγωνάκι, πόσα χρειάζονται ακόμα για να συμπληρώσουν το τετράγωνο;

2. Ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να κατασκευάσουν μια λωρίδα με κάποιο επαναλαμβανόμενο μοτίβο, χρησιμοποιώντας τετραγωνάκια σε δύο χρώματα. Όταν το φτιάξουν, ανάλογα με το πού έχει σταματήσει κάθε ομάδα, τους ζητά να σκεφτούν τη συνέχεια του μοτίβου, χωρίς να ζητά τον κανόνα, τους ρωτά για παράδειγμα: «*Μπορείτε να βρείτε ποιο χρώμα θα είναι το 20ο τετραγωνάκι;*»

## 2. <u>ΠΕΔΙΟ ΙΙ:</u> ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΜΕΤΡΗΣΗ, ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### 2.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ & ΜΕΤΡΗΣΗ

#### 2.1.1 Σημασία του υπο- πεδίου «Γεωμετρία και Μέτρηση»

*2.1.1α Γεωμετρία*

Η Γεωμετρία συνδέεται με την αντίληψη του χώρου, κάτι που μαρτυρά τόσο η ετυμολογία της λέξης όσο και η ιστορική πορεία ανάπτυξης των γεωμετρικών εννοιών. Εκκινώντας από πρακτικές δραστηριότητες και την ανάγκη του ανθρώπου να περιγράψει τον περιβάλλοντα χώρο, οι γεωμετρικές φόρμες έγιναν σταδιακά αντιληπτές αφαιρετικά και περιγράφηκαν θεωρητικά με αξιωματικό τρόπο. Ωστόσο, όταν αναφερόμαστε στην εκπαίδευση των παιδιών, η γεωμετρία εξακολουθεί να αφορά πρωτίστως *'την αντίληψη του χώρου στον οποίο τα παιδιά ζουν, αναπνέουν και κινούνται'* (Freudenthal, 1983, p. 403).

Η Γεωμετρία συνιστά «ένα δίκτυο εννοιών, τρόπων σκέψης και συστημάτων αναπαράστασης» (Batista, 2007, σ. 843) με τα οποία διερευνούμε τα σχήματα και τον χώρο γύρω μας. Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης συνδέεται με τη μετάβαση από μια γενικότερη αντίληψη των γεωμετρικών μορφών με τις αισθήσεις και την εμπειρία (αισθησιο-κινητική) σε μια κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τα στοιχεία τους, τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις (αναλυτικο-συνθετική) (Fiscbein, 1993). Η σημασία της διδασκαλίας της Γεωμετρίας θα μπορούσε να συνοψιστεί στα εξής (Koeno et al., 2016):

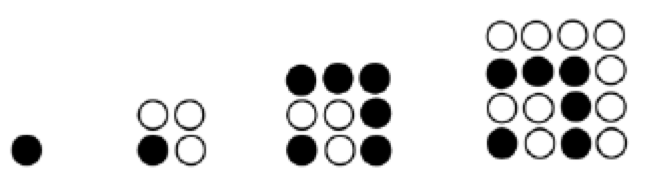
<u>Πρακτική και εκπαιδευτική αξία της Γεωμετρίας</u>: Ένα πλήθος από χωρικές και γεωμετρικές γνώσεις είναι απαραίτητες για την αντίληψη καθημερινών καταστάσεων και προβλημάτων και πολλές δράσεις του ατόμου στηρίζονται σε αυτές (π.χ. αντίληψη και διαχείριση φυσικών και τεχνητών αντικειμένων, έργων τέχνης και εφαρμογών της επιστήμης). Η δημιουργία και η επεξεργασία νοερών εικόνων και αναπαραστάσεων, η αντίληψη δισδιάστατων και

τρισδιάστατων αντικειμένων, η ευελιξία στην αλλαγή οπτικών γωνιών και η χωρική μνήμη που καλλιεργούνται με την κατάλληλη διδασκαλία της Γεωμετρία έχουν μεγάλη σημασία για τον άνθρωπο και αποκτούν στα προγράμματα σπουδών τα τελευταία χρόνια την ίδια σημασία με την αντίληψη των αριθμών και των νοερών πράξεων (Clements, & Battista, 1992).

Προπαρασκευαστική αξία της Γεωμετρίας: Οι έννοιες και οι διαδικασίες της Γεωμετρίας στηρίζουν την προσέγγιση πολλών μαθηματικών εννοιών: αξιοποιούνται στην επίλυση προβλήματος με την δημιουργία κατάλληλων διαγραμμάτων, στηρίζουν τη δημιουργία νοερών εικόνων, την κατανόηση συμβόλων, την κατανόηση σχηματισμών για την απόδοση αριθμητικών σχέσεων, όπως, για παράδειγμα, στην αριθμογραμμή. Επίσης, έννοιες και διαδικασίες της Γεωμετρίας είναι απαραίτητες για την κατανόηση και την ανάπτυξη γραφικών παραστάσεων ή άλλων μαθηματικών διεργασιών που στηρίζονται σε δισδιάστατες ή τρισδιάστατες διατάξεις (πράξεις, υποδιαιρέσεις μονάδων, πίνακες, κ.ά).

Οι γεωμετρικές έννοιες υποστηρίζεται ότι αποτελούν τη βάση της μαθηματικής σκέψης και ότι ο χωρικός και γεωμετρικός συλλογισμός είναι κεντρικής σημασίας όχι μόνο για την κατανόηση των Μαθηματικών αλλά και για άλλα πεδία των Θετικών Επιστημών, όπως οι Φυσικές Επιστήμες, η Τεχνολογία και η Μηχανική (Sarama & Clements, 2009, Davis, 2015). Η διδασκαλία της Γεωμετρίας ειδικότερα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση παρέχει στους μαθητές ευκαιρίες εμπλοκής σε διαδικασίες συλλογισμού, συστηματικής τεκμηρίωσης και (άτυπης αρχικά) απόδειξης που τους διευκολύνουν να εισαχθούν, στη συνέχεια, στη γεωμετρική και γενικότερα στη μαθηματική απόδειξη.

Εγγενής αξία της Γεωμετρίας: Η εγγενής αξία της Γεωμετρίας προκύπτει από τη σύνδεση εμπειρίας και νοήματος (Henderson & Taimina, 2006). Οι μαθητές, για παράδειγμα, μπορούν να βιώσουν την διανοητική πρόκληση και την αισθητική απόλαυση που προκύπτει από την ενασχόληση με τη Γεωμετρία 'παίζοντας' με τον κύβο του Rubik ή μέσα από τη γνωριμία τους με το έργο καλλιτεχνών, όπως του Ολλανδού καλλιτέχνη Escher. Παράλληλα, με τη γεωμετρία μπορούν να επιλυθούν ενδιαφέροντα προβλήματα με 'κομψό' τρόπο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το πρόβλημα της εύρεσης του αθροίσματος των πρώτων 100 περιττών αριθμών: 1 + 3 + 5 + …+ 197 + 199 = . Στην εικόνα παρακάτω φαίνεται η γεωμετρική επίλυση αυτού του προβλήματος. Παρατηρώντας τη γεωμετρική δομή του μοτίβου, εύκολα βρίσκεται η λύση αυτού του προβλήματος: το άθροισμα των πρώτων 100 περιττών αριθμών είναι: 100 Χ 100 = 10.000.




**Εικόνα 1.** Το άθροισμα των 100 πρώτων περιττών αριθμών με γεωμετρικό και συμβολικό τρόπο

***2.1.1β*** *Μέτρηση*

Σύμφωνα με τους Koeno et al. (2016), η Μέτρηση συνδέεται με την ανάγκη μας να αποτυπώσουμε την πραγματικότητα με αριθμούς και συνεπώς αναφέρεται σε μια μαθηματική οργάνωση της πραγματικότητας. Η μέτρηση μπορεί να θεωρηθεί ως ‘η απόδοση μιας αριθμητικής τιμής σε ένα χαρακτηριστικό ή σε μια ιδιότητα ενός αντικειμένου’ (NCTM, 2003 p. 1), η οποία προκύπτει από τη σύγκριση ανάμεσα στο χαρακτηριστικό ή την ιδιότητα που μετράται και στο ίδιο χαρακτηριστικό ή ιδιότητα μιας ορισμένης μονάδας μέτρησης. Η διαδικασία της μέτρησης δεν περιορίζεται σε αριθμητικούς υπολογισμούς, αλλά περιλαμβάνει μια σειρά μαθηματικών εργαλείων που αναπτύχθηκαν για αυτό το σκοπό, όπως μετρικά συστήματα ή πρακτικά εργαλεία μέτρησης (μετροταινίες, μεζούρες, ογκομετρικά δοχεία), αλλά και μια σειρά αλγόριθμων και διαδικασιών, π.χ. για τη μετατροπή μετρήσεων από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη.

Μετρήσεις και γενικότερα άτυπες και τυπικές συγκρίσεις μεγεθών πραγματοποιούν οι μαθητές από πολύ μικρή ηλικία. Για παράδειγμα, προσπαθούν να μετρήσουν ποια διαδρομή είναι πιο μεγάλη, πόσο ψηλά είναι, ποιο αντικείμενο είναι πιο μεγάλο ή ποιο δοχείο χωράει περισσότερο κλπ. Η Μέτρηση αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών ακριβώς λόγω της πρακτικής της αξίας και της εφαρμογής της σε πάρα πολλούς τομείς της καθημερινής ζωής. Ταυτόχρονα, η Μέτρηση αποτελεί σημαντικό πεδίο των μαθηματικών, καθώς γεφυρώνει την Αριθμητική με τη Γεωμετρία, διασυνδέεται με τη Στατιστική και την Άλγεβρα και έχει πολλές εφαρμογές στις φυσικές και ανθρωπιστικές επιστήμες, στην αρχιτεκτονική, στη μουσική κλπ. (Chambris et al., 2017).

**2.1.2 Ανάπτυξη των ΠΜΑ στο υπο-πεδίο «Γεωμετρία και Μέτρηση»**

Η θεματική ενότητα της Γεωμετρίας-Μέτρησης αναπτύσσεται σε 4 θεματικές ενότητες: *Γεωμετρία του Επιπέδου, Γεωμετρία του Χώρου, Μετασχηματισμοί, Μέτρηση*, όπως φαίνεται στους δυο πίνακες που ακολουθούν.

Οι δυο πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζουν το μαθηματικό περιεχόμενο των ΠΜΑ που αφορούν τη Γεωμετρία και τη Μέτρηση στο Δημοτικό Σχολείο αντιστοίχως στο νέο ΠΣ, καθώς και την οργάνωση και κατανομή τους κατά θεματική ενότητα και υπο-ενότητα.

| Υπο-πεδίο | Θεματικές ενότητες | Θεματικές υπο-ενότητες | ΠΜΑ | Υπο-διαίρεση ΠΜΑ |
|---|---|---|---|---|
| ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ | | | | |
| | **Γεωμετρία του επιπέδου** | *Γραμμές - γωνίες* | Αναγνώριση | |
| | | | Ιδιότητες | |
| | | | Σχεδίαση - κατασκευή | |
| | | | Σχέσεις | |
| | | | | |
| | | *Πολύγωνα* | Αναγνώριση | Τρίγωνα |
| | | | | Τετράπλευρα |
| | | | | Πολύγωνα |
| | | | Ιδιότητες | Τρίγωνα |
| | | | | Τετράπλευρα |
| | | | | Πολύγωνα |
| | | | Σχεδίαση - κατασκευή | |
| | | | Σχέσεις | |
| | | | | |
| | | *Κύκλος* | Αναγνώριση | |
| | | | Ιδιότητες | |
| | | | Σχεδίαση - κατασκευή | |
| | | | Σχέσεις | |
| | | | | |
| | | *Γεωμετρικοί τόποι* | | |
| | | | | |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | | |
| | | | | |
| | **Μετασχηματισμοί** | *Ανάκλαση - συμμετρία* | Αναγνώριση | |
| | | | Εφαρμογή | |
| | | | Αξιοποίηση στην αποδεικτική διαδικασία | |
| | | | | |
| | | *Μεταφορά* | Αναγνώριση | |
| | | | Εφαρμογή | |
| | | | Αξιοποίηση στην αποδεικτική διαδικασία | |
| | | | | |
| | | *Στροφή* | Αναγνώριση | |
| | | | Εφαρμογή | |
| | | | Αξιοποίηση στην αποδεικτική διαδικασία | |
| | | | | |
| | | *Ομοιοθεσία* | Αναγνώριση | |
| | | | Εφαρμογή | |
| | | | Αξιοποίηση στην αποδεικτική διαδικασία | |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | **Γεωμετρία του χώρου** | *Ευθείες-Επίπεδα-Δίεδρες γωνίες* | Αναγνώριση | |
| | | | Ιδιότητες | |
| | | | Σχεδίαση - κατασκευή | |
| | | | Σχέσεις | |
| | | | | |
| | | *Πρίσματα - πυραμίδες* | Αναγνώριση | |
| | | | Ιδιότητες | |
| | | | Σχεδίαση - κατασκευή | |
| | | | Σχέσεις | |
| | | | | |
| | | *Στερεά εκ περιστροφής* | Αναγνώριση | |
| | | | Ιδιότητες | |
| | | | Σχεδίαση - κατασκευή | |
| | | | Σχέσεις | |
| | | | | |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | | |
| | | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **ΜΕΤΡΗΣΗ** | **Μήκος** | *Έννοια* | Διατήρηση |
| | | | Επικάλυψη/ μονάδες |
| | | *Σύγκριση-διάταξη-εκτίμηση* | Χωρίς μετρηση |
| | | | Με μέτρηση |
| | | *Πράξεις* | Χωρίς μετρηση |
| | | | Με μέτρηση |
| | | *Υπολογισμοί με τύπους* | Περίμετρος |
| | | | Μήκος κύκλου |
| | | | Μήκος τόξου |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | |
| | | | |
| | **Μέτρο γωνιών** | *Έννοια* | Επικάλυψη/ μονάδες μέτρησης |
| | | *Σύγκριση-διάταξη-εκτίμηση* | Χωρίς μετρηση |
| | | | Με μέτρηση |
| | | *Πράξεις* | Χωρίς μετρηση |
| | | | Με μέτρηση |
| | | *Υπολογισμοί με τύπους* | Γωνίες κανονικών πολυγώνων |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | |
| | | | |
| | **Εμβαδόν** | *Έννοια* | Διατήρηση |
| | | | Επικάλυψη/ μονάδες |
| | | *Σύγκριση-διάταξη-εκτίμηση* | Χωρίς μετρηση |
| | | | Με μέτρηση |
| | | *Πράξεις* | Χωρίς μετρηση |
| | | | Με μέτρηση |
| | | *Υπολογισμοί με τύπους* | Πολυγώνου |
| | | | Πρίσματος-πυραμίδας-κυλίνδου- κώνου- σφαίρας |
| | | | Κυκλικού δίσκου - κυκλικού τομέα |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | |
| | | | |
| | **Όγκος** | *Έννοια* | Διατήρηση |
| | | | Επικάλυψη/ μονάδες |
| | | *Σύγκριση-διάταξη-εκτίμηση* | Χωρίς μετρηση |
| | | | Με μέτρηση |
| | | *Πράξεις* | Χωρίς μετρηση |
| | | | Με μέτρηση |
| | | *Υπολογισμοί με τύπους* | Κύβου - παραλ/πέδου |
| | | | Πρίσματος- Πυραμίδας |
| | | | Κυλίνδρου-κώνου-σφαίρας |
| | | *Μοντελοποίηση- Επίλυση Προβλήματος* | |

- Η **Γεωμετρία του Επιπέδου** διαρθρώνεται σε τέσσερις υπο-ενότητες: *Γραμμές-Γωνίες, Πολύγωνα και Κύκλοι.*

Στο Δημοτικό Σχολείο οι μαθητές ξεκινούν στις μικρότερες τάξεις (Α' και Β' Δημοτικού) με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των σχημάτων με βάση τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν βασικές ιδιότητες και σχέσεις. Στη συνέχεια, διευρύνουν την αναγνώριση εστιάζοντας στα στοιχεία των σχημάτων (σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα) και στις ιδιότητες τους (παράλληλες, κάθετες, ίσες, άνισες) και ταξινομούν τα σχήματα (τρίγωνα, τετράπλευρα, πολύγωνα) με βάση αυτές τις ιδιότητες (Γ' και Δ΄ Δημοτικού). Τέλος, οι μαθητές διατυπώνουν απλούς ορισμούς και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, εφαρμόζοντάς τες στην επίλυση προβλημάτων (Ε' και Στ').

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις κατασκευές και τη σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων. Στις μικρές τάξεις (Α' και Β' Δημοτικού) οι μαθητές ξεκινούν με απλές κατασκευές με χρήση χειραπτικών υλικών (π.χ. καλαμάκια). Στη συνέχεια, περνούν σε απλούς σχεδιασμούς σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον, χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα και σχεδιάζουν γεωμετρικά στοιχεία (ευθείες, ημιευθείες, κύκλους, κλπ), καθώς και γεωμετρικά σχήματα.

- Η **Γεωμετρία του Χώρου** διαρθρώνεται σε τρεις υπο-ενότητες: *επίπεδα-ευθείες-δίεδρες γωνίες, πρίσματα-πυραμίδες, στερεά εκ περιστροφής*

Οι μαθητές από τις μικρές τάξεις του Δημοτικού (Α' και Β' Δημοτικού) συστηματοποιούν τις χωρικές τους εμπειρίες με την αξιοποίηση διαφορετικών συστημάτων αναφοράς, καθώς και με τη χρήση χωρικών εννοιών, όπως πάνω/κάτω, μέσα/έξω, δίπλα/μεταξύ, δεξιά/αριστερά, και έρχονται σε πρώτη επαφή με οικείους χάρτες. Σταδιακά, συστηματοποιούν την αναγνώριση, περιγραφή θέσεων, σχέσεων και διαδρομών σε χάρτες και οδηγούνται στην προσέγγιση της κλίμακας (Ε' Δημοτικού). Παράλληλα, εισάγονται στη χρήση αλφαριθμητικών ζευγών (Δ' Δημοτικού) και διατεταγμένων ζευγών για την παράσταση θέσεων στο πρώτο τεταρτημόριο (Ε' και Στ' Δημοτικού).

Στα πλαίσια της Γεωμετρίας του χώρου έμφαση δίνεται και σε διεργασίες οπτικοποίησης. Από τις μικρές τάξεις οι μαθητές ασκούνται στην αναγνώριση κατασκευών από διαφορετικές οπτικές γωνίες, ενώ σταδιακά κάνουν κατασκευές από εικόνες, σχέδια και άλλες αναπαραστάσεις και σχεδιάζουν σε ισομετρικό χαρτί ή σε ψηφιακό περιβάλλον δοσμένες τρισδιάστατες κατασκευές (Γ, Δ΄ και Ε' Δημοτικού). Τέλος, αναγνωρίζουν όψεις, σχεδιάζουν 3Δ σχήματα, όπως και όψεις, κατόψεις και αναπτύγματα στερεών σχημάτων (Ε και Στ' Δημοτικού).

Αναφορικά με τα πρίσματα και τις πυραμίδες οι μαθητές ξεκινούν στις μικρότερες τάξεις (Α' και Β' Δημοτικού) με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των στερεών με βάση τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν βασικές ιδιότητες και σχέσεις (Γ' και Δ΄ Δημοτικού). Παράλληλα κατασκευάζουν και αναπαριστούν στερεά με διάφορα μέσα, ενώ αναγνωρίζουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως έδρες στερεών. Τέλος, οι μαθητές διατυπώνουν απλούς ορισμούς και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών σχημάτων, εφαρμόζοντάς τες στην επίλυση προβλημάτων (Ε' και Στ').

- Οι **Μετασχηματισμοί** διαρθρώνονται σε τέσσερις υπο-ενότητες: *Ανάκλαση – Συμμετρία, Μεταφορά, Περιστροφή και Ομοιοθεσία.*

Οι μαθητές ξεκινούν παρατηρώντας μετατοπίσεις και στροφές (90, 180 μοιρών) και προβλέπουν το αποτέλεσμα. Αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα εντοπίζοντας τους άξονες συμμετρίας και κάνουν κατασκευές συμμετρικών καταστάσεων και σχημάτων σε πραγματικά και ψηφιακά περιβάλλοντα, προσεγγίζοντας τις ιδιότητες της συμμετρίας. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς για σύγκριση σχημάτων και πραγματοποιούν κατασκευές με τη χρήση μετατοπίσεων και στροφών, κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και σχήματα με οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες συμμετρίας και περιγράφουν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας (Γ’, Δ’, Ε’ και ΣΤ΄ Δημοτικού).

- Η θεματική ενότητα της **Μέτρησης** αναπτύσσεται σε τέσσερις άξονες: *Μέτρηση γωνίας, Μέτρηση μήκους, Μέτρηση επιφάνειας και Μέτρηση όγκου.*

Αναφορικά με τη μέτρηση γωνίας οι μαθητές ξεκινούν αναγνωρίζοντας ίσες γωνίες και συγκρίνοντας γωνίες με την ορθή. Στη συνέχεια, συγκρίνουν γωνίες με τη χρήση διαφόρων (χειραπτικών και ψηφιακών) μέσων και τις μετρούν με τυπικές μονάδες και μοιρογνωμόνιο (Δ’-Στ Δημοτικού). Τέλος, κάνουν πράξεις με γωνίες, τις συγκρίνουν χρησιμοποιώντας ιδιότητες και σχέσεις και κατασκευάζουν γωνίες με τη χρήση κατάλληλων γεωμετρικών οργάνων (Ε’ και Στ’ Δημοτικού).

Αναφορικά με τη μέτρηση μηκών, οι μαθητές αρχικά πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις, διατάξεις όπως και αναλύσεις και συνθέσεις μηκών. Στη συνέχεια πραγματοποιούν επικαλύψεις με επαναλήψεις με μη τυπικές και τυπικές μονάδες και διαπιστώνουν την ανάγκη χρήσης τυπικών μονάδων μέτρησης. Επιπλέον, πραγματοποιούν μετρήσεις με το χάρακα, επιλύουν απλά μετρικά προβλήματα και συγκρίνουν μήκη κατ’ εκτίμηση (Α΄ και Β’ Δημοτικού). Στη συνέχεια, οι μαθητές συστηματοποιούν τις μετρήσεις χρησιμοποιώντας τυπικές μονάδες, υπολογίζουν περιμέτρους σχημάτων και διερευνούν τις σχέσεις πλευρών και περιμέτρων, όπως και διαμέτρου και μήκους κύκλου (Δ΄, Ε΄ και Στ΄τάξεις).

Όσον αφορά τη μέτρηση επιφάνειας, οι μαθητές ξεκινούν με άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών. Επικαλύπτουν επιφάνειες χρησιμοποιώντας μη τυπικές ή τυπικές μονάδες, δομούν τις επιφάνειες σε γραμμές και στήλες και καταμετρούν συστηματικά το πλήθος των μονάδων, ενώ ασκούνται στη μέτρηση κατ’ εκτίμηση (Α’ και Β΄ Δημοτικού). Σταδιακά συστηματοποιούν τις παραπάνω γνώσεις, πραγματοποιώντας συγκρίσεις απλών επιφανειών με τη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων. Χρησιμοποιούν την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ γραμμών και στηλών για να υπολογίσουν το εμβαδόν δομημένων επιφανειών και διερευνούν τις σχέσεις πλευρών, περιμέτρου και εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος (Δ’-ΣΤ΄ Δημοτικού). Τέλος, επιλύουν προβλήματα μέτρησης επιφανειών με τη χρήση οργάνων και τύπων και πραγματοποιούν συγκρίσεις επιφανειών κατ’ εκτίμηση.

Τέλος, σχετικά με τον όγκο οι μαθητές ξεκινούν συγκρίνοντας τον όγκο δύο δοχείων, άμεσα ή με τη χρήση ενός τρίτου δοχείου. Συγκρίνουν όγκους κατασκευών που αποτελούνται από μικρό αριθμό δομικών υλικών (κύβοι) και εκτιμούν τον όγκο απλών κατασκευών (Α΄ και Β’ Δημοτικού). Σταδιακά συστηματοποιούν τον υπολογισμό του πλήθους των κύβων που απαρτίζουν ορθογώνιες κατασκευές συνδυάζοντάς τον με τις γραμμικές διαστάσεις των ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων και καταλήγουν στη διατύπωση τύπων. Τέλος, υπολογίζουν τον όγκο στερεών με χρήση τυπικών μονάδων και υποδιαιρέσεων και πραγματοποιούν υπολογισμούς κατ’ εκτίμηση (Γ’ - ΣΤ΄ Δημοτικού).

### 2.1.3. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες μαθητών στο υπο-πεδίο «Γεωμετρία και Μέτρηση»

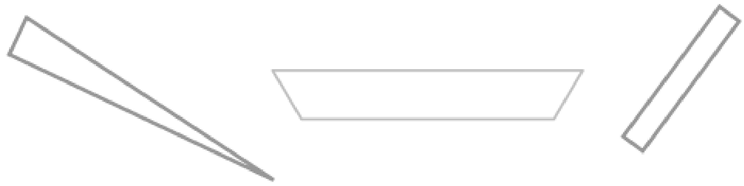
#### ***2.1.3α₁*** *Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης - Γεωμετρία*

Οι μαθητές μαθαίνουν να αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (επίπεδα και στερεά) από τις μικρές ηλικίες. Η αναγνώριση αυτή αφορά ένα πρώτο στάδιο (από τα πέντε που σύμφωνα με τους Van Hiele (1986) ακολουθεί η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης) και σχετίζεται με μία ολιστική αντίληψη των σχημάτων, χωρίς διαχωρισμό στοιχείων και ιδιοτήτων. Τα φαινόμενα σε αυτό το στάδιο υπερισχύουν των ιδιοτήτων. Έτσι, ένα σχήμα είναι τετράγωνο «επειδή μοιάζει με τετράγωνο». Στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου επιδιώκεται να αναπτυχθεί μια πρώτη οργανωμένη αντίληψη των μερών των σχημάτων και των ιδιοτήτων τους. Οι μαθητές αρχικά περιγράφουν και αναλύουν τα σχήματα με βάση το σύνολο των ιδιοτήτων τους, ενώ δεν μπορούν να καθορίσουν ποιες ιδιότητες είναι επαρκείς για την περιγραφή ενός σχήματος. Στη συνέχεια της ανάπτυξής τους οι μαθητές ασκούνται στο να κατηγοριοποιούν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά, π.χ. ταξινομούν τετράπλευρα και πολύγωνα βάσει της αξονικής συμμετρίας, των γωνιών και των πλευρών τους. Σταδιακά οδηγούνται σε ένα πιο θεωρητικοποιημένο επίπεδο, περνώντας από την άτυπη στην τυπική σκέψη. Έτσι, για παράδειγμα στις τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ένα σχήμα είναι τετράγωνο «γιατί έχει τέσσερις ίσες πλευρές, τέσσερις ορθές γωνίες, τις απέναντι πλευρές παράλληλες, …», ενώ ξεκινούν συζητήσεις και διερευνήσεις σχετικά με τα κρίσιμα χαρακτηριστικά των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και καταβάλλονται προσπάθειες διατύπωσης άτυπων ορισμών.

#### ***2.1.3 α₂*** *Δυσκολίες μαθητών - Γεωμετρία*

Οι χωρικές και γεωμετρικές έννοιες, αν και θεωρούνται αρκετά απλές, λόγω της εποπτικής τους προσέγγισής και της καθημερινής εμπειρίας, συνοδεύονται με παρανοήσεις που δεν επιτρέπουν την ουσιαστική και σε βάθος κατανόηση που είναι απαραίτητη τόσο για την ανάπτυξη πιο τυπικών γεωμετρικών εννοιών όσο και για την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

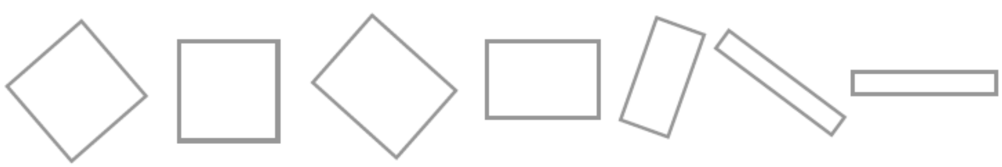
Η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές, αν και δεν δυσκολεύονται στην (ολιστική) αναγνώριση χαρακτηριστικών σχημάτων όπως τετράγωνα, τρίγωνα κ.λπ., παραμένουν, χωρίς την κατάλληλη διδακτική προσέγγιση, στο επίπεδο αυτό ανεξάρτητα από την ηλικία που βρίσκονται. Αντιλαμβάνονται τα σχήματα ολιστικά και δεν καταφέρνουν να περιγράψουν τα στοιχεία και τις ιδιότητές τους ή τα προσεγγίζουν με γενικό τρόπο (Clements & Sarama, 2020). Οι έρευνες φανερώνουν, επίσης, ότι η αρχική ευκολία αναγνώρισης μειώνεται, όταν τα σχήματα δεν είναι οικεία ή δεν έχουν μια συγκεκριμένη μορφή, προσανατολισμό ή μέγεθος, και γενικότερα όταν δεν ανταποκρίνονται στις στερεοτυπικές μορφές, όπως τα σχήματα που ακολουθούν (Jones & Tzekaki, 2016).



**Εικόνα 2.** Γεωμετρικά σχήματα με διαφορετικό προσανατολισμό

Τα μικρότερα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά σχήματα στα αντικείμενα που βλέπουν ή δεν αποδίδουν σε αυτά γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Αντίθετα, τους δίνουν νόημα με βάση τη χρήση ή το ρόλο τους. Για παράδειγμα, δεν μπορούν να διακρίνουν στη μπάλα που παίζουν το γεωμετρικό αντικείμενο ‘σφαίρα’. Επιπρόσθετα, η αντίληψη των γεωμετρικών στοιχείων ενός σχήματος επηρεάζεται σημαντικά από τη φυσική υπόσταση αυτών των στοιχείων στις πρακτικές εμπειρίες των παιδιών. Τα ιδιαίτερα μέρη των σχημάτων, όπως οι πλευρές, οι κορυφές ή οι γωνίες γίνονται αντιληπτές με πρακτικό τρόπο, ενώ συχνά δημιουργούνται λανθασμένες αντιλήψεις που ξεπερνιούνται δύσκολα. Για παράδειγμα, οι μαθητές θεωρούν τη γωνία ως «μύτη» ή μέρος συνάντησης ή σπαστή γραμμή ή κίνηση, δηλαδή της δίνουν αρκετά νοήματα που διαφέρουν από το γεωμετρικό της νόημα (Mitchelmore & White, 2000).

Η παραδοσιακή διδασκαλία με τα σχήματα να παρουσιάζονται ξεχωριστά και χωρίς να εντοπίζονται οι μεταξύ τους σχέσεις εμποδίζει την αντίληψη των μετασχηματισμών και των αλλαγών που μπορεί να υποστεί ένα σχήμα παραμένοντας στην ίδια κατηγορία, όπως για παράδειγμα το ακόλουθο ορθογώνιο:



**Εικόνα 3.** Ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαφορετικά στοιχεία

Οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν σχήματα που έχουν σημαντικά μετασχηματισθεί, έχουν στραφεί ή εκταθεί ή έχουν αλλάξει αναλογίες. Οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται με προτυπικά φαινόμενα που αφορούν την προσθήκη (ή την αφαίρεση) κρίσιμων γεωμετρικών χαρακτηριστικών ενός σχήματος. Για παράδειγμα, ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας των τετραγώνων και των παραλληλογράμμων ως δύο διακριτές κατηγορίες βρίσκεται συχνά πίσω από τις δυσκολίες των μαθητών να συσχετίσουν αυτά τα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους. Έτσι, είναι πιθανόν οι μαθητές να μπορούν να κατονομάσουν τις ιδιότητες του τετραγώνου, του ορθογωνίου και του παραλληλογράμμου, χωρίς να μπορούν να διακρίνουν ότι το ένα αποτελεί υποκατηγορία του άλλου (Jones & Tzekaki, 2016).

Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές παρακολουθούν στροφές ή μετακινήσεις, ενώ αναγνωρίζουν τη συμμετρία από τη μικρότερη ηλικία και διαφοροποιούνται στις επιδόσεις με βάση τη συνθετότητα του σχήματος και τη τοποθέτηση του άξονα (Ng & Sinclair, 2015). Για παράδειγμα, όταν τα παιδιά συναρμολογούν ένα πάζλ, χρησιμοποιούν διαισθητικά την ανάκλαση, τη στροφή και τη μετατόπιση, για να μεταφέρουν τα κομμάτια στη θέση τους. Δυσκολεύονται, όμως, να συνειδητοποιήσουν αυτές τις κινήσεις και τα αποτελέσματά τους, αλλά και να αντιληφθούν ότι αν αλλάξουμε τον προσανατολισμό ή τη θέση ενός σχήματος, αυτό δεν αλλάζει. Από την άλλη εντοπίζονται αρκετές δυσκολίες στην αντίληψη και σύνθεση των διάφορων οπτικών γωνιών και των όψεων των αντικειμένων, ως αποτέλεσμα έλλειψης άσκησης και εμπειριών, κάτι που ακολουθεί το άτομο και στην ενήλικη ζωή του (Newconbe & Learmonth, 2005).

Τέλος, σε επίπεδο κατασκευών, αν και οι μαθητές είναι σε θέση να παράγουν πολλά σχήματα με διάφορα υλικά, δεν αντιολαμβάνονται τα αντικείμενα αυτά ως γεωμετρικά, δηλαδή αναγνωρίζουν σε αυτά τη γενική μορφή κι όχι τα δομικά τους χαρακτηριστικά. Με άλλα λόγια, πραγματοποιούν τις κατασκευές κιναισθητικά (δηλαδή, με τη δράση των χεριών) και τις περιγράφουν ως δράσεις, αλλά δεν οδηγούνται αυτονόητα στην αναγνώριση και περιγραφή των γεωμετρικών τους ιδιοτήτων. Οι συνθέσεις και οι αναλύσεις σχημάτων είναι ιδιαίτερα σημαντικές για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, αλλά δεν είναι αυτονόητο ότι οι μαθητές θα πραγματοποιήσουν σχηματισμούς σχημάτων, εικόνων ή μορφών με τη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων και όχι με τυχαίο και μη συστηματικό τρόπο, αν δεν γίνουν οι κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις. Οι σύγχρονες έρευνες υπογραμμίζουν ότι η εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης από το ένα επίπεδο στο άλλο δε σχετίζεται μόνο με την ηλικιακή ανάπτυξη των μαθητών αλλά και –ίσως κυρίως- με κοινωνικοπολιτισμικές επιδράσεις και μαθησιακές εμπειρίες (Sarama & Clements, 2009). Τα νοήματα που οι μαθητές αναπτύσσουν σχετικά με τις διάφορες γεωμετρικές έννοιες δεν μπορούν να διαχωριστούν από συγκεκριμένα περικείμενα (φυσικά ή μη), ενσώματες εμπειρίες και δυνατότητες δράσης με συγκεκριμένα εργαλεία (English, 2013, Mariotti, 2002, deFreitas & Sinclair, 2014).

### ***2.1.3 α$_3$*** *Προτάσεις διδακτικής διαχείρισης - Γεωμετρία*

Κεντρικός στόχος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας είναι η καλλιέργεια και η ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού, η οργάνωση και επεξεργασία του χώρου, δηλαδή, στη βάση του γεωμετρικού μοντέλου. Η προσέγγιση αυτή απαιτεί να ξεπεράσουν οι μαθητές τη γενικότερη ολιστική αντίληψη των μορφών που έχουν και να συστηματοποιήσουν μια αναλυτική κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τις ιδιότητες και τις σχέσεις τους. Σε αυτό το πλαίσιο οι εμπειρίες που προσφέρονται στα παιδιά είναι ο κατεξοχήν σημαντικότερος παράγοντας για την ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται πρώτα να αναζητήσει τα φαινόμενα που αναγκάζουν τον μαθητή να συγκροτήσει το νοητό αντικείμενο που μαθηματικοποιείται από τη συγκεκριμένη έννοια και κατόπιν να σχεδιάσει δραστηριότητες με στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να διασυνδέσουν τα ‘φαινόμενα’ της δράσης και των κατασκευών τους με την προς διαπραγμάτευση γεωμετρική έννοια (Freudenthal, 2012).

Σύμφωνα με τα ευρήματα των ερευνών που αναφέρθηκαν παραπάνω, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να εμπλέξουν τους μαθητές σε μαθηματικές δραστηριότητες που περιέχουν μια ποικιλία σχημάτων σε διαφορετικές θέσεις, μεγέθη και προσανατολισμούς, ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να εντοπίσουν τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός σχήματος και να ξεπεράσουν τις ολιστικές προτυπικές προσεγγίσεις. Ομοίως, χρειάζεται οι μαθητές να αποκτήσουν εμπειρίες ταξινόμησης ειδικών περιπτώσεων σχημάτων (π.χ. είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές και τις γωνίες). Τέλος, είναι σημαντικό οι μαθητές να συστηματοποιήσουν ιδιότητες και σχέσεις μέσα από διερευνήσεις σταθερών και μεταβλητών χαρακτηριστικών ενός σχήματος (π.χ. στα τετράγωνα είναι μεταβλητό το μήκος της πλευράς, αλλά όχι το μέτρο της γωνίας), τη χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, αλλά και τη συζήτηση σχετικά με τα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους. Παράλληλα, να αναπτύξουν μια 'γεωμετρική' γλώσσα, που θα τους επιτρέψει να συλλογιστούν, να επικοινωνήσουν και να αναστοχαστούν. Η διδασκαλία είναι αναγκαίο να στοχεύει, εκτός από την κατάκτηση της ορολογίας που αφορά στις ιδιότητες των σχημάτων, στην ανάπτυξη μιας ανεπίσημης παραγωγικής γλώσσας (όλα, μερικά, κανένα, αν... τότε..., κ.ο.κ.).

Οι συστηματικές αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων, οι αλλαγές οπτικών γωνιών και η σύνδεση πραγματικών καταστάσεων με διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων δίνουν ευκαιρίες στους μικρούς μαθητές να περάσουν από την ολιστική αντίληψη σε μια αντίληψη των μερών των σχημάτων, συνεπώς και των ιδιοτήτων τους (Jones & Tzekaki, 2016). Μέσα από την εμπλοκή τους με κατασκευές με διάφορα υλικά και μέσα, όπως και με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, οι μαθητές χρειάζεται να οδηγηθούν σταδιακά στη διάκριση πλευρών, γωνιών, μεγεθών, οριζόντιων και κατακόρυφων τοποθετήσεων, όπως και παραλληλιών και καθετοτήτων.

Τέλος, η άσκηση των μαθητών στους μετασχηματισμούς των σχημάτων, κυρίως στην μετακίνηση, τη στροφή και τη συμμετρία, κρίνεται απαραίτητη για την ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης. Εμπειρίες με νοερές περιστροφές ή αντιστροφές, διπλώσεις ή άλλους μετασχηματισμούς δημιουργούν δυναμικές αναπαραστάσεις που ενισχύουν την οπτικοποίηση και τις νοερές επεξεργασίες. Για παράδειγμα, τα κανονικά ψηφοθετήματα (regular tessellations) είναι μια εφαρμογή των μετασχηματισμών με καλλιτεχνικό χαρακτήρα, που προκαλεί το ενδιαφέρον των παιδιών (Britton, 2001). Στόχος είναι να αντιληφθούν οι μαθητές τους μετασχηματισμούς που συχνά χρησιμοποιούν διαισθητικά, να διερευνήσουν τις μετασχηματιστικές δράσεις και τα αποτελέσματά τους σε απλά σχήματα και να αρχίσουν να περιγράφουν αυτούς τους μετασχηματισμούς με μαθηματικούς όρους.

### ***2.1.3β$_1$*** *Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης - Μέτρηση*

Το νέο πρόγραμμα σπουδών στοχεύει στην ουσιαστική κατανόηση της διαδικασίας της μέτρησης με την προσέγγιση και χρήση μεθόδων και εργαλείων, αλλά και την ανάπτυξη δεξιοτήτων εκτίμησης και υπολογισμών κατά προσέγγιση. Σε αυτήν την κατεύθυνση ξεκινά από άμεσες συγκρίσεις για την κατανόηση του προς μέτρηση μεγέθους και συνεχίζει με έμμεσες συγκρίσεις με συστηματικές επικαλύψεις με άτυπες και τυπικές μονάδες με στόχο οι μαθητές να συνδέσουν τα *συνεχή* χαρακτηριστικά των γεωμετρικών αντικειμένων, όπως είναι το μήκος, η γωνία, η επιφάνεια ή ο όγκος, με τις αντίστοιχες μονάδες μέτρησης, οι οποίες έχουν χαρακτηριστικά διακριτών μεγεθών (van den Heuvel-Panhuizen, & Buys, 2005). Τέλος, οι μετρήσεις συνδέονται με τους τύπους των επιφανειών και των όγκων των επίπεδων και στερεών σχημάτων.

Σύμφωνα με τους Van de Walle et al. (2013), κατά τη διαδικασία της μέτρησης ακολουθούμε τρία βήματα: α) αποφασίζουμε το χαρακτηριστικό που θα μετρήσουμε, β) επιλέγουμε μια μονάδα μέτρησης που έχει αυτό το χαρακτηριστικό και γ) συγκρίνουμε τη μονάδα μέτρησης με το χαρακτηριστικό που μετράμε, π.χ. το μήκος το συγκρίνουμε με μονάδα μέτρησης μήκους, την επιφάνεια με μονάδα μέτρησης επιφάνειας, κλπ. Η σύγκριση αυτή μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, π.χ. με επικάλυψη του μεγέθους που θέλουμε να μετρήσουμε με μονάδες μέτρησης ή με επανάληψη της μονάδας και μέτρηση των επαναλήψεων. Ο αριθμός των μονάδων που χρειάζονται ή των επαναλήψεων είναι η τιμή της μέτρησης. Οι μαθητές, ωστόσο, φαίνεται να δυσκολεύονται να αντιληφθούν τη διαδικασία της μέτρησης αυτής καθαυτής ως μιας διαδικασίας κάλυψης με μονάδες μέτρησης ανεξάρτητης από το προς μέτρηση χαρακτηριστικό ή ότι κατά τη μέτρηση στην πραγματικότητα συγκρίνουν το ίδιο χαρακτηριστικό της μονάδας μέτρησης και του αντικειμένου που μετρούν. Έτσι, η μέτρηση του μήκους μπορεί να φαντάζει διαφορετική από αυτήν του εμβαδού και ακόμη περισσότερο από εκείνη του όγκου.

***2.1.3 β$_2$*** *Δυσκολίες μαθητών - Μέτρηση*

Αν και οι μικροί μαθητές είναι επιτυχείς σε μεγάλο βαθμό στις άμεσες συγκρίσεις, π.χ. μπορούν εύκολα να αποφασίσουν ποιο σκοινί είναι μακρύτερο βάζοντας το ένα δίπλα στο άλλο, δυσκολεύονται στις έμμεσες συγκρίσεις. Η σύγκριση με τη βοήθεια επικαλύψεων με άτυπες ή τυπικές μονάδες μέτρησης δεν είναι αυτονόητη και συχνά περνά από ένα στάδιο «ψευδο-επικάλυψης» με ανόμοιες μονάδες ή με κενά μεταξύ των μονάδων (Curry, Mitchelmore & Outhred, 2006) μέχρι οι μαθητές να μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν συστηματικά την επικάλυψη για να μετρήσουν. Η διαδικασία αυτή, επίσης, δεν συνδέεται χωρίς κατάλληλες δράσεις με το αριθμητικό αποτέλεσμα. Δεν επαρκεί οι μαθητές να καταμετρούν με αυθαίρετες ή τυπικές μονάδες ούτε να διαβάζουν μια ένδειξη στο χάρακα, αλλά απαιτείται σύνδεση των διαδικασιών μέτρησης με το μέγεθος που μετράται και του αριθμού με τη επανάληψη της μονάδας πάνω στο μέγεθος.

Ομοίως, η χρήση των συμβατικών μονάδων γίνεται συχνά χωρίς την κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης και χωρίς τη συνειδητοποίηση της ανάγκης για χρήση τυπικών μονάδων. Ακόμα και στο τέλος του Δημοτικού Σχολείου πολλά παιδιά (Clements & Battista, 1992) δυσκολεύονται να διαμερίσουν σε μονάδες μέτρησης το χαρακτηριστικό του αντικειμένου που θέλουν να μετρήσουν. Αντίστοιχες δυσκολίες υπάρχουν σε καταστάσεις που χρειάζονται εκτίμηση, ιδίως στις περιπτώσεις που οι μαθητές δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν σημεία αναφοράς. Για παράδειγμα, αν ζητήσουμε από τους μαθητές να εκτιμήσουν την επιφάνεια του πίνακα της τάξης σε τετραγωνικά μέτρα, είναι πολύ πιθανόν να δυσκολευτούν, αφού συνήθως απουσιάζει η αντίληψη σημείων αναφοράς για το πόση επιφάνεια καταλαμβάνει ένα τετραγωνικό μέτρο.

Δυσκολίες συναντούν, επίσης, οι μαθητές στην κατανόηση της διατήρησης ενός μεγέθους συγχέοντάς το με το μέτρο του. Με άλλα λόγια, δεν συνειδητοποιούν εύκολα ότι το μέγεθος είναι ανεξάρτητο από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται κάθε φορά. Αντίστοιχα, ο τρόπος ή τα βήματα που θα επιλέξουμε για να καλύψουμε το μέγεθος δεν επηρεάζει την τελική μέτρηση. Έτσι, για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας μπορούμε να την χωρίσουμε με «βολικό» τρόπο σε επιμέρους κομμάτια, να υπολογίσουμε το εμβαδόν του καθενός χωριστά και κατόπιν να τα προσθέσουμε, χωρίς να μεταβάλλεται το συνολικό εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας.

Τα όργανα μέτρησης (π.χ. το υποδεκάμετρο, το μοιρογνωμόνιο) είναι εργαλεία που χρειαζόμαστε ώστε να μη χρησιμοποιούμε μονάδες μέτρησης. Η χρήση τους, όμως, δημιουργεί δυσκολίες, ιδίως στις περιπτώσεις που οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει το χαρακτηριστικό που μετρούν. Για παράδειγμα, συχνά, οι μαθητές χρησιμοποιούν τον χάρακα ξεκινώντας από το 1 και όχι από το 0 ή μετρούν τα σημάδια στο χάρακα και όχι τα διαστήματα ανάμεσα στα σημάδια (Watson, Jones & Pratt, 2013) ή αδυνατούν να μετρήσουν μήκη που ξεπερνούν το μήκος του χάρακα που έχουν στη διάθεσή τους (McDonough, 2010). Αντίστοιχα, η χρήση τύπων για τη μέτρηση των επιφανειών και των όγκων των επίπεδων και στερεών σχημάτων, χωρίς οι μαθητές να έχουν κατανοήσει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τη διαδικασία της μέτρησης, προκαλεί δυσκολίες στους μαθητές και οδηγεί σε μια αποσπασματική χρήση τους. Το γεγονός ότι οι τύποι του εμβαδού και του όγκου χρησιμοποιούν κατά τον υπολογισμό μονάδες μέτρησης μήκους δημιουργεί πρόσθετα προβλήματα στους μαθητές, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που οι μαθητές δεν έχουν οδηγηθεί στους τύπους μέσω διερευνητικών δραστηριοτήτων και δεν έχουν αντιληφθεί τις συνδέσεις ανάμεσα τους, π.χ. πώς συνδέεται ο τύπος του εμβαδού με το τύπο του όγκου (Koeno et al., 2016).

***2.1.3 β$_3$** Προτάσεις διδακτικής διαχείρισης- Μέτρηση*

Με στόχο την εννοιολογική κατανόηση της διαδικασίας της μέτρηση οι Van de Walle et al. (2013) προτάσσουν την εμπλοκή των μαθητών στις παρακάτω μαθηματικές δραστηριότητες:

- Πραγματοποίηση άμεσων και έμμεσων συγκρίσεων, π.χ. οι μαθητές συγκρίνουν τα μήκη δύο σκοινιών τοποθετώντας το ένα δίπλα στο άλλο ή συγκρίνουν τον όγκο δύο δοχείων χρησιμοποιώντας ένα τρίτο δοχείο.
- Χρήση μοντέλων των μονάδων μέτρησης
- Χρήση οργάνων μέτρησης

Στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου είναι ανάγκη να δοθεί έμφαση σε μαθηματικά έργα με στόχο την εννοιολογική προσέγγιση του μετρούμενου μεγέθους (μήκους, γωνίας, επιφάνειας ή όγκου) ως ιδιαίτερου χαρακτηριστικού των αντικειμένων, το οποίο παραμένει αμετάβλητο. Η πραγματοποίηση άμεσων και έμμεσων συγκρίσεων βοηθά προς αυτή την κατεύθυνση. Επίσης, απαραίτητη είναι η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες κάλυψης του μεγέθους με ομοειδή μεγέθη ή μονάδες ή ‘γεμίσματα’ με διάφορα υλικά, με στόχο τη σύνδεση της μέτρησης με τη διαίρεση ενός μεγέθους σε ίσα μέρη, καθώς και τη σύνδεση της επανάληψης της μονάδας με έναν αριθμό. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να δομήσουν μια επιφάνεια αρχικά πραγματοποιώντας επιστρώσεις με τετράγωνα υλικά και, στη συνέχεια, ζωγραφίζοντας τετράγωνα ή χαράζοντας οριζόντιες και κάθετες γραμμές, ενώ τέλος να καταμετρήσουν τον αριθμό των τετράγωνων μονάδων που χρειάστηκαν για να καλύψουν την επιφάνεια.

Η μέτρηση, αρχικά, μπορεί να στηρίζεται σε μη τυπικές μονάδες μέτρησης, ώστε οι συζητήσεις να εστιαστούν στην επιλογή της μονάδας, στον τρόπο επανάληψής της, στις πιθανές υποδιαιρέσεις της που θα χρειαστούν, ώστε να ολοκληρωθεί η μέτρηση, στο αμετάβλητο του μεγέθους ανεξάρτητα από την επιλογή της μονάδας και στη σύνδεση του αριθμού που εκφράζει το μέτρο του μεγέθους με την επανάληψη της μονάδας. Παράλληλα, μέσα από την εμπλοκή τους σε διερευνητικές δραστηριότητες οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο μέγεθος της μονάδας μέτρησης και στην τιμή της, καθώς και την ανάγκη χρήσης τυπικών μονάδων. Η κατασκευή και χρήση μη τυπικών οργάνων μέτρησης μπορεί επίσης να βοηθήσει προς την ίδια κατεύθυνση, ενώ θα προετοιμάσει την εισαγωγή των τυπικών μονάδων και των τυπικών οργάνων μέτρησης.

Για να εξοικειωθούν τα παιδιά με τις τυπικές μονάδες μέτρησης μπορούν να ξεκινήσουν με τη μέτρηση γνώριμων αντικειμένων, τα οποία στη συνέχεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σημεία αναφοράς, π.χ. το ύψος μιας πόρτας είναι περίπου 2 μέτρα ή το μήκος του χάρακα που χρησιμοποιούν είναι 20 εκ. Ιδιαίτερα όσον αφορά στο μήκος, τα παιδιά μπορούν να βρουν σχετικά σημεία αναφοράς στο σώμα τους, π.χ. το μήκος της παλάμης τους είναι περίπου 10 εκ. Αντίστοιχα, η μέτρηση κατ' εκτίμηση (Bragg, & Outhred, 2000) βοηθά τους μαθητές να εστιάσουν στο χαρακτηριστικό και στη διαδικασία μέτρησής του, ενώ παράλληλα τους εξοικειώνει με τις τυπικές μονάδες, αφού η εκτίμηση ενός μεγέθους απαιτεί την αξιοποίηση των μονάδων ως σημείων αναφοράς. Με άλλα λόγια, ο μαθητής θα πρέπει να γνωρίζει πόσο «μεγάλο» είναι ένα μέτρο, ένα τετραγωνικό μέτρο ή ένα κυβικό μέτρο, ή πόσο πρέπει να στρίψει για να διαγράψει μια γωνία $90^{o}$ κ.ο.κ.

Σε καμιά περίπτωση οι μαθητές δεν πρέπει να αποστηθίζουν τύπους, αν προηγουμένως δεν τους έχουν διερευνήσει επαρκώς. Μόνο αν κατανοήσουν το πώς προκύπτουν οι τύποι, μπορούν να τους χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά (Koeno et al., 2016). Για παράδειγμα, πριν περάσουμε στον τύπο του εμβαδού πρέπει πρώτα αξιοποιηθεί η χωρική συλλογιστική των παιδιών, ώστε να αντιληφθούν ότι η επιφάνεια ενός παραλληλογράμμου αποτελείται από σειρές και στήλες και ότι μπορούμε να βρούμε το συνολικό αριθμό των μονάδων του εμβαδού πολλαπλασιάζοντας σειρές και στήλες (Outhred, & Mitchelmore, 2000). Η χρήση διάφορων καμβάδων μπορεί να βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση, καθώς οι καμβάδες μπορούν να λειτουργήσουν με τρόπο αντίστοιχο του χάρακα για το μήκος, να δείξουν δηλαδή τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού. Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι η διδασκαλία των μετρήσεων σε όλες τις φάσεις θα πρέπει να στηριχθεί στην αξιοποίηση πληθώρας φυσικών, χειραπτικών και ψηφιακών υλικών αναπαράστασης και εργαλείων μέτρησης.

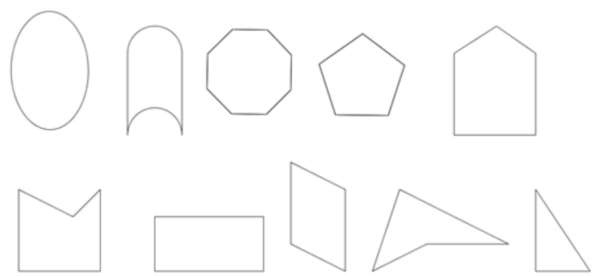
### 2.1.4. Ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες διδακτικής διαχείριση/ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας

***2.1.4α*** *Γεωμετρία: Ενδεικτικό παράδειγμα εξέλιξης της έννοιας των τετραπλεύρων*

Μέσα από ένα μικρό αριθμό μαθηματικών έργων που παρουσιάζονται παρακάτω γίνεται προσπάθεια να σκιαγραφηθεί μια πορεία ανάπτυξη της έννοιας των τετραπλεύρων. Εκκινώντας από μια ολιστική αντίληψη των χαρακτηριστικών των τετραπλεύρων προσεγγίζονται σταδιακά τα μέρη και οι ιδιότητες των ορθογωνίων παραλληλογράμμων και των τετραγώνων, ως ειδικές περιπτώσεις των τετραπλεύρων.

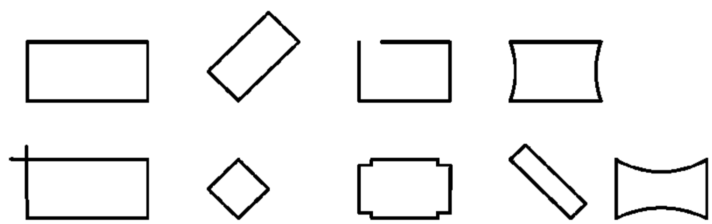
Α' και Β' Δημοτικού: Στα $1^{o}$ μαθηματικό έργο οι μαθητές ξεκινούν με μια δραστηριότητα κατηγοριοποίησης σχημάτων στην οποία οι ίδιοι πρέπει να θέσουν τα κριτήρια. Εντοπίζουν διαφορές και ομοιότητες μεταξύ των σχημάτων που τους δίνονται, αναγνωρίζουν τετράπλευρα και άλλα πολύγωνα και περιγράφουν τα κριτήρια της κατηγοριοποίησης χρησιμοποιώντας 'μαθηματικό' αλλά και καθημερινό λεξιλόγιο. Το $2^{ο}$ μαθηματικό έργο αφορά σε δραστηριότητες διάκρισης ορθογωνίων παραλληλογράμμων μέσα από μια ποικιλία παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων. Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που χρησιμοποιούνται δίνονται σε μια ποικιλία προσανατολισμών και μεγεθών, ώστε να μην περιορίζονται σε προτυπικές μορφές, π.χ. στον οριζόντιο και κατακόρυφο προσανατολισμό του σχήματος. Συνεπώς, η διάκριση μεταξύ των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων, αλλά και η περιγραφή και η κατηγοριοποίηση απαιτεί το πέρασμα από την ολιστική αναγνώριση στην αναγνώριση των χαρακτηριστικών των ορθογωνίων παραλληλογράμμων.

- Βρες τον κανόνα μου

| **Ανάπτυξη της έννοιας των τετραπλεύρων** | **Παράδειγμα δραστηριοτήτων** |
|---|---|
| | «Βρες τον κανόνα μου»: (*Οι μαθητές δρουν σε ομάδες. Ο εκπαιδευτικός δίνει στα παιδιά μια ποικιλία από επίπεδα γεωμετρικά σχήματα που έχει κατασκευάσει με χοντρό χαρτόνι ή άλλο υλικό, π.χ. όπως αυτά στην εικόνα. Καλό είναι να έχει τονιστεί με χρώμα το περίγραμμα των σχημάτων.)*<br> |
| ***Αναγνωρίζουν τετράπλευρα*** | $1^{η}$ ομάδα: Με το δαχτυλάκι σας ακολουθήστε το περίγραμμα των σχημάτων που έχετε μπροστά σας. Ξεχωρίστε μερικά από αυτά τα σχήματα με βάση ένα μυστικό κανόνα που θα αποφασίσετε μεταξύ σας.<br><br>Υπόλοιπες ομάδες: Βρείτε τον μυστικό κανόνα με βάση τον οποίο επέλεξε τα σχήματα η $1^{η}$ ομάδα. Μπορείτε να τον περιγράψετε; |
| ***Εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές των τετραπλεύρων με άλλα σχήματα*** | Αφού η $1^{η}$ ομάδα επιστρέψει τα σχήματα που επέλεξε, μια άλλη ομάδα ας ξεχωρίσει τώρα μερικά με βάση έναν άλλο 'μυστικό' κανόνα και ας ξαναρχίσει η δραστηριότητα από την αρχή. |
| ***Περιγράφουν και κατηγοριοποιούν πολύγωνα.*** | *(Οι ομάδες δοκιμάζουν να εντοπίσουν τον κανόνα (δηλαδή τις ιδιότητες των σχημάτων), με βάση τον οποίο έγινε η κατηγοριοποίηση και να τον περιγράψουν, π.χ. σχήματα με:*<br>• *καμπύλες επιφάνειες ή ευθείες*<br>• *με βαθουλώματα (κοίλα) ή χωρίς βαθουλώματα (κυρτά)*<br>• *4 πλευρές*<br>• *3 πλευρές* |

| | |
|---|---|
| | • *ορθές γωνίες, κλπ. Οι γωνίες μπορεί να χαρακτηριστούν με μη τυπικό τρόπο, π.χ. 'τετράγωνες άκρες', καθώς τα παιδιά δεν γνωρίζουν τη σχετική ορολογία)* |

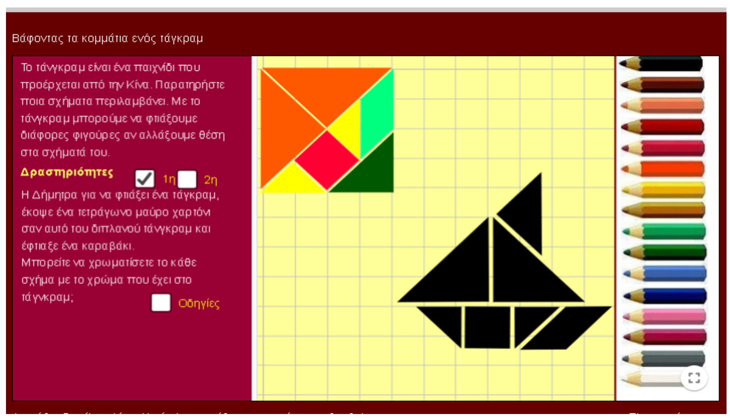
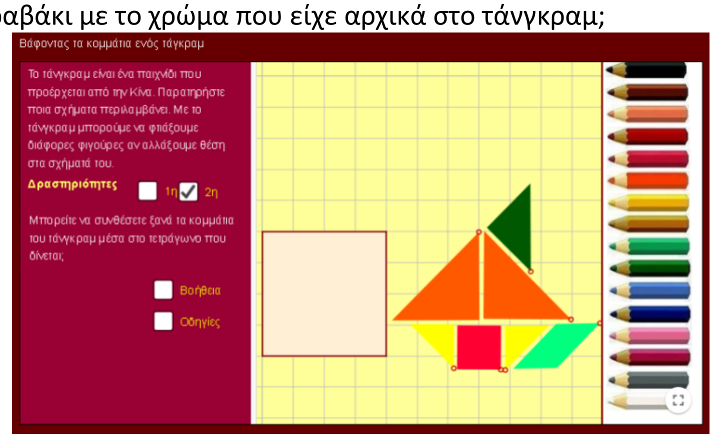
- <u>Φτιάξε την ομάδα</u>

| **Ανάπτυξη της έννοιας των τετραπλεύρων** | **Παράδειγμα δραστηριοτήτων** |
|---|---|
| <br><br><br><br><br>***Διακρίνουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα***<br><br><br>***Περιγράφουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα*** | «Φτιάξε την ομάδα»: (*Σε ένα φύλλο εργασίας δίνουμε στα παιδιά ένα σύνολο σχημάτων που αποτελούν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όπως φαίνεται στην εικόνα. )*<br><br>• Κυκλώστε τα σχήματα που ανήκουν στην ομάδα των ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Γιατί αυτά τα σχήματα ανήκουν στην ομάδα των ορθογωνίων παραλληλογράμμων;<br>• Ποια σχήματα δεν ανήκουν στην ομάδα των ορθογωνίων παραλληλογράμμων; Γιατί;<br><br>*(Μετά από συζητήσεις στις ομάδες και στην ολομέλεια της τάξης μπορεί να κατασκευαστεί ένας πίνακας με τα βασικά χαρακτηριστικά του σχήματος-στόχου.)* |

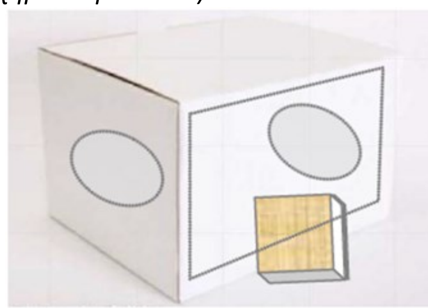
<u>Γ' Και Δ' Δημοτικού:</u> Στο 1ο μαθηματικό έργο οι μαθητές αναλύουν ένα τετράγωνο σε επιμέρους σχήματα και αναγνωρίζουν ίσα τρίγωνα και τετράπλευρα. Στη συνέχεια ανασυνθέτουν το τετράγωνο μέσω μετασχηματισμών, μεταφέροντας, ανακλώντας και περιστρέφοντας τρίγωνα και τετράπλευρα. Μέσω των μετασχηματισμών, της οπτικοποίησης, αλλά και του ελέγχου εικασιών και διαισθήσεων στα πλαίσια του ψηφιακού περιβάλλοντος οι μαθητές επεξεργάζονται σε μεγαλύτερο βάθος το τετράγωνο και τα επιμέρους σχήματα που το συνθέτουν, καθώς και τα χαρακτηριστικά τους σε μια ποικιλία θέσεων και προσανατολισμών.

Αντίστοιχα, στο 2ο μαθηματικό έργο οι μαθητές αναγνωρίζουν και διερευνούν περαιτέρω τα χαρακτηριστικά των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, καθώς και τις σχέσεις μεταξύ ορθογωνίων παραλληλογράμμων και ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων. Προσπαθώντας να περιγράψουν τα σχήματα που ψηλαφούν χρησιμοποιούν μαθηματικό λεξιλόγιο και οδηγούνται σταδιακά σε μια αντίληψη των μερών αυτών των σχημάτων, διακρίνουν πλευρές και γωνίες (και αντίστοιχα ακμές και κορυφές για τα παραλληλεπίπεδα), οριζόντιες και κατακόρυφες τοποθετήσεις και παραλληλίες. Οι παρατηρήσεις των παιδιών συστηματοποιούνται και εμπλουτίζονται τόσο μέσα από τη σχεδίαση στο γεωπίνακα και σε τετραγωνισμένους καμβάδες όσο και μέσα από τις κατασκευές με χειραπτικό υλικό.

- Τάνγκραμ

| **Ανάπτυξη της έννοιας των τετραπλεύρων** | **Παράδειγμα δραστηριοτήτων** |
|---|---|
| ***Αναγνωρίζουν όμοια τρίγωνα και τετράπλευρα και αναλύουν τετράγωνα σε επιμέρους σχήματα.*** | «Βάφοντας τα κομμάτια του τάγκραμ»: (*Η δραστηριότητα είναι διαθέσιμη στο Φωτόδεντρο: [http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-4416](http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-4416) )*<br><br>Με το τάγκραμ μπορούμε να φτιάξουμε διάφορες φιγούρες αν αλλάξουμε θέση στα σχήματά του.<br><br>Η Δήμητρα έκοψε ένα τετράγωνο μαύρο χαρτόνι σε κομμάτια σαν αυτά του διπλανού τάνγκραμ. Χρησιμοποίησε τα κομμάτια και έφτιαξε ένα καραβάκι. Μπορείτε να χρωματίσετε κάθε σχήμα στο καραβάκι με το χρώμα που είχε αρχικά στο τάνγκραμ; |
| ***Συνθέτουν τετράγωνα.***<br><br>***Μεταφέρουν, ανακλούν, περιστρέφουν τετράπλευρα και τρίγωνα.*** | <br>Μπορείτε να συνθέσετε ξανά τα κομμάτια του τάνγκραμ μέσα στο τετράγωνο που δίνεται; |

- <u>Με κλειστά μάτια</u>

| **Ανάπτυξη της έννοιας των τετραπλεύρων** | **Παράδειγμα δραστηριοτήτων** |
| --- | --- |
| ***Αναγνωρίζουν και διερευνούν χαρακτηριστικά και ιδιότητες ορθογωνίων παραλληλογράμμων και ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων.***<br><br>***Συνδέουν παραλληλόγραμμα με παραλληλεπίπεδα.***<br><br>***Σχεδιάζουν παραλληλόγραμμα.***<br><br>***Κατασκευάζουν παραλληλεπίπεδα χρησιμοποιώντας παραλληλόγραμμα.*** | «Με κλειστά μάτια»: *(Για αυτή τη δραστηριότητα χρειάζεται χαρτόκουτο, μια συλλογή από παραλληλεπίπεδα ή και άλλα καθημερινά αντικείμενα σε σχήμα παραλληλεπιπέδου, γεωπίνακες, καμβάδες και το υλικό Polydron ή ανάλογο υλικό που έχει κατασκευάσει ο εκπαιδευτικός από χοντρό χαρτόνι.*<br><br>*Στο χαρτόκουτο ο εκπαιδευτικός θα χρειαστεί να ανοίξει δύο τρύπες, ώστε να δημιουργηθεί ένα κουτί ψηλάφησης, όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω.)*<br><br>• Βάλε τα χέρια σου μέσα στο κουτί. Πιάσε ένα αντικείμενο και ψηλάφησέ το. Μπορείς να το περιγράψεις; Τι σχήμα έχει;<br>• Πόσες έδρες έχει; Πόσες ακμές; Πόσες κορυφές;<br>• Τι σχήμα έχει κάθε έδρα; Είναι όλες ίσες; Είναι κάποιες ίσες; Αν δεν είναι όλες ίσες, πόσο πιο μεγάλη είναι η μια έδρα από την άλλη; Πώς το μέτρησες;<br>• Επίλεξε δύο έδρες, τι είναι μεταξύ τους; Κάθετες, παράλληλες ή τεμνόμενες; Πώς το κατάλαβες;<br>• Ψηλάφησε μια έδρα και φτιάξε το σχήμα της στον καμβά ή στον γεωπίνακα.<br>• Χρησιμοποίησε το υλικό Polydron, για να κατασκευάσεις ένα στερεό που θα έχει το ίδιο σχήμα με αυτό που ψηλάφησες. |

<u>Ε’ Και Στ’ Δημοτικού:</u> Στα παρακάτω μαθηματικά έργα οι μαθητές εργάζονται στα πλαίσια του περιβάλλοντος της ‘Χελωνόσφαιρας’[1]. Πρόκειται για ένα περιβάλλον Γεωμετρίας της Χελώνας, το οποίο συνδέει τη γλώσσα προγραμματισμού Logo με ένα γραφιστικό περιβάλλον. Η γλώσσα προγραμματισμού Logo θεωρείται πολύ κοντά στη φυσική γλώσσα, ενώ μέσω της κινούμενης οντότητας που εκτελεί τις εντολές στο γραφιστικό περιβάλλον οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν γεωμετρικά σχήματα αντλώντας από τις ενσώματες και κιναισθητικές τους

[1] Περισσότερες πληροφορίες για τη χελωνόσφαιρα μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση: http://etl.eds.uoa.gr/ekpaideytiko-logismiko/syggrafika-ergaleia/xelwnosfaira.html

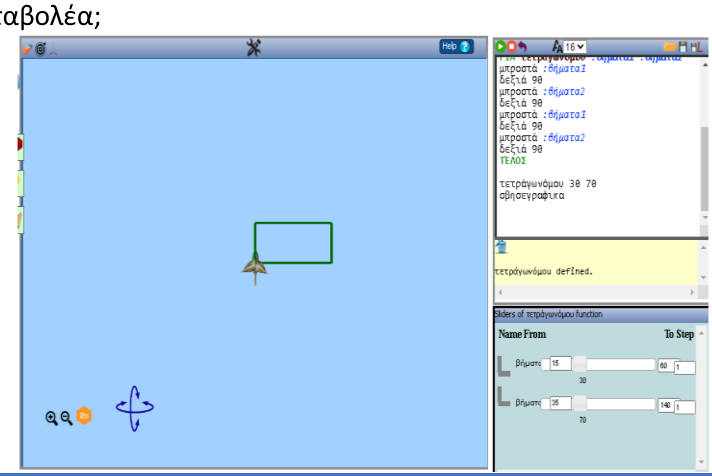
εμπειρίες. Παράλληλα με το εργαλείο ‘μεταβολέας’ μπορούν να χειρίζονται δυναμικά τις τιμές των παραμετρικών διαδικασιών που αναπτύσσουν και να βλέπουν άμεσα το γραφιστικό αποτέλεσμα στην οθόνη τους.

Στο 1ο μαθηματικό έργο οι μαθητές καλούνται να μετασχηματίσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τετράγωνο διορθώνοντας μια δοσμένη παραμετρική διαδικασία, με τέτοιο τρόπο, ώστε το τετράγωνο που θα σχηματίζεται να έχει μεταβλητό το μήκος των πλευρών. Μέσα από την εμπλοκή τους σε αυτό το μαθηματικό έργο συστηματοποιούν τα δομικά χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των ορθογωνίων παραλληλογράμμων και προσεγγίζουν τα τετράγωνα ως υποκατηγορία των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, διερευνώντας τα σταθερά και τα μεταβλητά χαρακτηριστικά κάθε σχήματος, αλλά και τις μεταξύ τους σχέσεις. Η προσπάθεια διόρθωσης της παραμετρικής διαδικασίας ‘αναγκάζει’ τους μαθητές να εστιάσουν στις διαδικασίες κατασκευής και στην απόδοση μιας γεωμετρική αναπαράστασης με τη γενικευμένη μορφή ενός προγράμματος.

Στο 2ο μαθηματικό έργο οι μαθητές εστιάζουν στη διερεύνηση των ιδιοτήτων των τετραγώνων. Και πάλι καλούνται να διορθώσουν μια παραμετρική διαδικασία, ώστε να σχεδιάζονται τετράγωνα με μεταβλητό το μήκος των πλευρών τους. Η παραμετρική διαδικασία που δίνεται αρχικά είναι φτιαγμένη έτσι, ώστε να έχει λάθη όχι μόνο ως προς τις δοσμένες τιμές, π.χ. διαφορετικές τιμές για τα μήκη των πλευρών, αλλά και να χρησιμοποιεί μεταβλητές σε στοιχεία του τετραγώνου που δεν θα έπρεπε, π.χ. στο μέτρο των γωνιών. Για να διορθωθεί, λοιπόν, η παραμετρική διαδικασία από τους μαθητές απαιτείται να έχουν συστηματοποιήσει τις ιδιότητες του τετραγώνου και να μπορούν να διακρίνουν τα σταθερά και τα μεταβλητά χαρακτηριστικά του. Η προσπάθεια διόρθωσης της παραμετρικής διαδικασίας ‘αναγκάζει’ τους μαθητές να εστιάσουν στις διαδικασίες κατασκευής και στην απόδοση του τετραγώνου με τη γενικευμένη μορφή ενός προγράμματος, ενώ το γραφιστικό αποτέλεσμα στη οθόνη του υπολογιστή τους επιτρέπει να ελέγξουν τις εικασίες και τις διαισθήσεις τους. Έτσι το τετράγωνο που κατασκευάζουν δεν είναι ένα συγκεκριμένο τετράγωνο, αλλά αντιπροσωπεύει μια κλάση γεωμετρικών σχημάτων.

Στο 3$^{ο}$ μαθηματικό έργο η διερεύνηση των παραλληλογράμμων ολοκληρώνεται μέσα από τους μετασχηματισμούς των τετραγώνων με στόχο να πλακοστρωθεί μια δοσμένη επιφάνεια χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Και πάλι οι μαθητές για να φέρουν σε πέρας αυτό το έργο διορθώνουν μια δοσμένη παραμετρική διαδικασία. Για να τα καταφέρουν πρέπει να εντοπίσουν τις ιδιότητες του τετραγώνου και με βάση αυτές να αναλύσουν και να ανασυνθέσουν την παραμετρική διαδικασία που τους δόθηκε. Παράλληλα, πρέπει να διερευνήσουν τον τρόπο μετασχηματισμού των τετραγώνων και να τον ‘περιγράψουν’ μέσα από συγκεκριμένες εντολές στροφής και επανασχεδίασης του τετραγώνου, για να ‘πετύχει’ η πλακόστρωση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εδώ παρουσιάζει η διάκριση μεταξύ της γωνίας ως ιδιότητας του τετραγώνου και της γωνίας ως στροφής στα πλαίσια μετασχηματισμών και ως στοιχείο προσδιορισμού της θέσης ενός σχήματος στο επίπεδο.

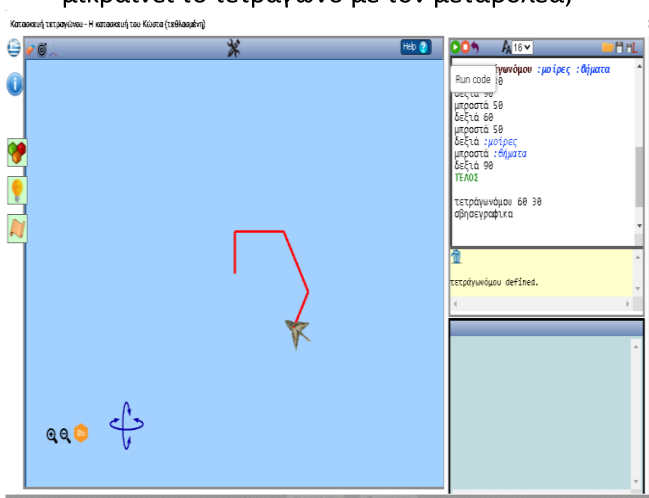
- Παραλληλόγραμμα και τετράγωνα

<table>
<tr><th>Ανάπτυξη της έννοιας των τετραπλεύρων</th><th>Παράδειγμα δραστηριοτήτων</th></tr>
<tr><td>
Παρατηρούν στοιχεία των παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους (Ισότητα απέναντι πλευρών).<br><br>
Αναγνωρίζουν ιδιότητες των παραλληλογράμμων<br><br>
Διερευνούν και αιτιολογούν τη σχέση μεταξύ ορθογωνίων παραλληλογράμμων και τετραγώνων.<br><br>
Σχεδιάζουν και κατασκευάζουν σχήματα με δεδομένες ιδιότητες (τετράγωνα με μεταβλητό το μήκος των πλευρών)
</td><td>
«Η κατασκευή της Ελένης»: (Η δραστηριότητα είναι διαθέσιμη στο Φωτόδεντρο: http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-4135)<br><br>
• Η Ελένη έφτιαξε τη διαδικασία «τετράγωνόμου», για να βάλει την οντότητα να φτιάξει ένα τετράγωνο. Όμως, όταν την εκτέλεσε με τιμές 30 και 70, της βγήκε ένα ορθογώνιο!<br><br>
για τετράγωνό μου :βήματα1 :βήματα2<br>
μπροστά :βήματα1<br>
δεξιά 90<br>
μπροστά :βήματα2<br>
δεξιά 90<br>
μπροστά :βήματα1<br>
δεξιά 90<br>
μπροστά :βήματα2<br>
δεξιά 90<br>
τέλος<br><br>
• Χρησιμοποίησε τον μεταβολέα και προσπάθησε να φτιάξεις τετράγωνο. Με ποιες τιμές τα κατάφερες;<br>
• Μπορείς να φτιάξεις ένα μεγαλύτερο ή ένα μικρότερο τετράγωνο απ' αυτό που έφτιαξες πριν; Με ποιες τιμές;<br>
• Μπορείς να βοηθήσεις την Ελένη να διορθώσει τη διαδικασία, ώστε όταν την εκτελεί να βγαίνει πάντα τετράγωνο, αλλά και να μπορεί να μεγαλώνει και να μικραίνει το τετράγωνο με το μεταβολέα;<br>


</td></tr>
</table>

**Εικόνα 4.** Παραλληλόγραμμα και τετράγωνα

- Σχεδίαση τετραγώνων

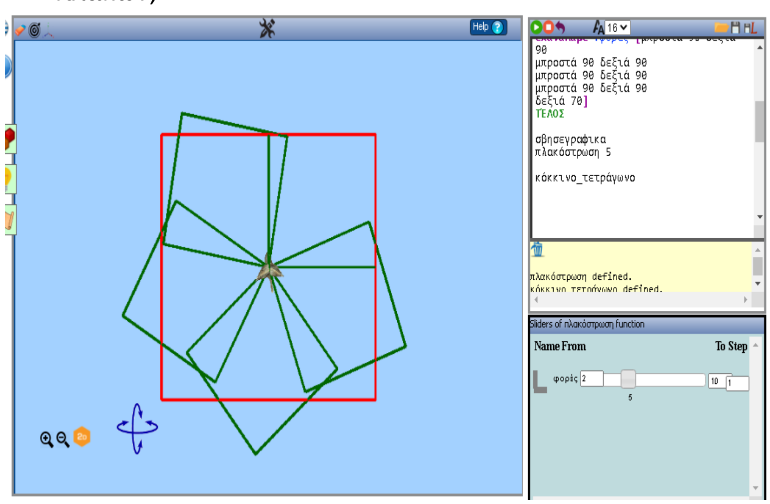
| Ανάπτυξη της έννοιας των τετραπλεύρων | Παράδειγμα δραστηριοτήτων |
|---|---|
| ***Παρατηρούν στοιχεία των τετραγώνων και τις ιδιότητές τους.***<br><br>***Αναγνωρίζουν ιδιότητες των τετραγώνων.***<br><br>***Περιγράφουν και αιτιολογούν τις ιδιότητες των τετραγώνων (μήκη πλευρών, μέτρο γωνιών) .***<br><br>***Σχεδιάζουν και κατασκευάζουν σχήματα με δεδομένες ιδιότητες (τετράγωνα με μεταβλητό το μήκος των πλευρών).*** | «Η κατασκευή του Κώστα»: *(Η δραστηριότητα είναι διαθέσιμη στο Φωτόδεντρο: [http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-4019](http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-4019) )*<br>• Ο Κώστας έφτιαξε τη διαδικασία «τετράγωνόμου» με σκοπό να βάλει την κινούμενη οντότητα να φτιάξει ένα τετράγωνο. Όταν όμως εκτέλεσε τη διαδικασία με τιμές 60 και 30, η οντότητα αντί για τετράγωνο έφτιαξε μια τεθλασμένη γραμμή. Στη συνέχεια ο Κώστας χρησιμοποίησε τον μεταβολέα για να 'κλείσει' το σχήμα, αλλά και πάλι δεν τα κατάφερε!<br><br>*για τετράγωνόμου :μοίρες :βήματα*<br>*μπροστά 30*<br>*δεξιά 90*<br>*μπροστά 50*<br>*δεξιά 60*<br>*μπροστά 50*<br>*δεξιά :μοίρες*<br>*μπροστά :βήματα*<br>*δεξιά 90*<br>*τέλος*<br>• Χρησιμοποίησε τον μεταβολέα και προσπάθησε να κλείσεις το σχήμα. Τα κατάφερες; Γιατί;<br>• Μπορείς να βοηθήσεις τον Κώστα να διορθώσει τη διαδικασία, ώστε όταν την εκτελεί, να βγαίνει πάντα τετράγωνο, αλλά και να μπορεί να μεγαλώνει και να μικραίνει το τετράγωνο με τον μεταβολεά;<br> |

**Εικόνα 5.** Σχεδίαση τετραγώνων

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ Ευρωπαϊκή Ένωση Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης ΕΣΠΑ 2014-2020 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

- Πλακόστρωση με τετράγωνα

| **Ανάπτυξη της έννοιας των τετραπλεύρων** | **Παράδειγμα δραστηριοτήτων** |
|---|---|
| ***Περιγράφουν και αιτιολογούν τις ιδιότητες των τετραγώνων (μήκη πλευρών, μέτρο γωνιών) .***<br><br>***Μεταφέρουν-περιστρέφουν τετράγωνα και διερευνούν τις ιδιότητες των μετασχηματισμών τους.***<br><br>***Σχεδιάζουν και κατασκευάζουν σχήματα με δεδομένες ιδιότητες (πλακοστρώσεις).*** | «Πλακόστρωση με τετράγωνα»: *(Η δραστηριότητα είναι διαθέσιμη στο Φωτόδεντρο: [http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-3961](http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-3961))*<br>• Ο Μιχάλης έγραψε την παρακάτω διαδικασία με σκοπό να πλακοστρώσει την επιφάνεια που περικλείει το κόκκινο τετράγωνο με μικρότερες τετράγωνες πλάκες. Όταν εκτέλεσε τη διαδικασία με τιμή 5, δεν έμεινε ικανοποιημένος από το αποτέλεσμα. Στη συνέχεια ο Μιχάλης χρησιμοποίησε τον μεταβολέα, αλλά και πάλι δεν κατάφερε να καλύψει την επιφάνεια του τετραγώνου χωρίς κενά ή αλληλοεπικαλύψεις.<br><br>*για πλακόστρωση :φορές*<br>*επανάλαβε :φορές [μπροστά 90 δεξιά 90*<br>*μπροστά 90 δεξιά 90*<br>*μπροστά 90 δεξιά 90*<br>*μπροστά 90 δεξιά 90*<br>*δεξιά 70]*<br>*τέλος*<br>• Χρησιμοποίησε και εσύ τον μεταβολέα και προσπάθησε να πλακοστρώσεις την επιφάνεια του κόκκινου τετραγώνου.<br>• Μπορείς να βοηθήσεις τον Μιχάλη να διορθώσει τη διαδικασία, ώστε όταν την εκτελεί να πλακοστρώνεται το κόκκινο τετράγωνο χωρίς κενά ή αλληλοεπικαλύψεις των πλακών; |




**Έργο 6.** Πλακόστρωση με τετράγωνα

2.1.4β *Μέτρηση: Ενδεικτικά έργα*

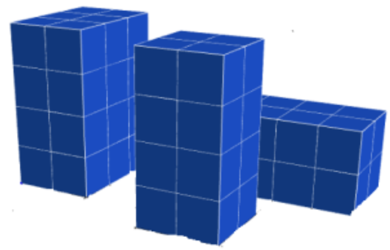
**Έργο 1:** Πολυκατοικίες από κύβους

**Χαρακτηριστικά έργου**

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία - Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Δράσεις οικοδόμησης έννοιας: Δομή</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβά-σιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Γεωμετρία του χώρου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Οπτικοποίηση</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2">Χειραπτικό υλικό: κύβοι</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και τη διαπραγμάτευση.</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Κοινωνικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

*(Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες. Κάθε ομάδα έχει στη διάθεσή της διαφορετικό αριθμό κύβων)*

- Χρησιμοποιήστε όσους από τους κύβους θέλετε για να κατασκευάσετε μια ‘πολυκατοικία’, η οποία θα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Κάθε κύβος θα αναπαριστά και ένα διαμέρισμα.
- Πόσα διαμερίσματα έχει κάθε όροφος της πολυκατοικίας σας; Πόσους ορόφους έχει; Πόσα είναι όλα τα διαμερίσματα της πολυκατοικίας σας;
- Μπορείτε να βρείτε από πόσα διαμερίσματα αποτελούνται οι πολυκατοικίες που κατασκεύασαν οι συμμαθητές σας;



Εικόνα 7. Ενδεικτικές κατασκευές με κύβους

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης*: Οι παραπάνω δραστηριότητες εξοικειώνουν τους μαθητές με τη μέτρηση όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέσω σύγκρισης με μια μη τυπική μονάδα που έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το μέγεθος που θέλουμε να μετρηθεί. Τα παιδιά συχνά δυσκολεύονται να προσέξουν συνδυαστικά τις δύο διαστάσεις του ύψους και του πλάτους. Έτσι, είναι πιθανόν κάποια να πιστεύουν πως μια ψηλή και λεπτή πολυκατοικία αποτελείται από περισσότερους κύβους/ διαμερίσματα σε σχέση με μια κοντή και πλατιά. Η σύγκριση του αριθμού των κύβων/διαμερισμάτων από τους οποίους αποτελούνται οι κατασκευές των διαφορών ομάδων συντελεί στο να ξεπεράσουν οι μαθητές αντίστοιχες λανθασμένες αντιλήψεις.

Ταυτόχρονα, μέσω της παραπάνω διερευνητικής δραστηριότητας οι μαθητές αναπτύσσουν διαισθήσεις σχετικά με την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των γραμμικών διαστάσεων των εν λόγω στερεών. Χρειάζεται να εξηγήσουν τους τρόπους με τους οποίους υπολόγισαν τον αριθμό των κύβων από τους οποίους αποτελείται μια ορθογώνια κατασκευή. Ορισμένοι μαθητές πιθανόν να ανακαλύψουν ένα κανόνα πολλαπλασιασμού για την εύρεση του αριθμού των κύβων. Σε καμιά περίπτωση, όμως, δεν πρέπει να χρησιμοποιηθούν τύποι υπολογισμού, παρά μόνο αν οι ίδιοι μαθητές μπορούν να τους εξηγήσουν.

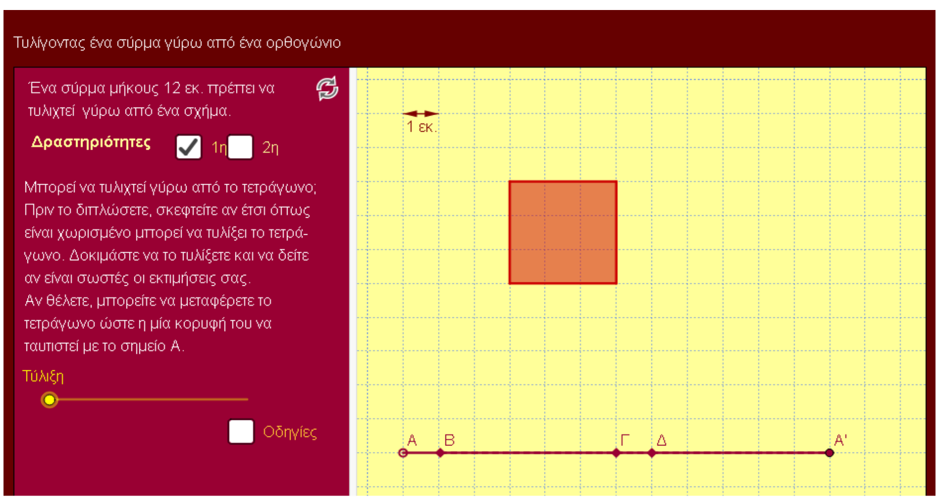
**Έργο 2:** Τυλίγοντας ένα σύρμα γύρω από ένα ορθογώνιο

**Χαρακτηριστικά έργου**

| **ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ** | | **ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ** | | **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ** | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Πεδίο*** | Γεωμετρία - Μέτρηση | ***Ειδικά*** | Μετασχηματιστικές δράσεις: οπτικοποίηση, αναπαράσταση Δράσεις οικοδόμησης έννοιας: σύγκριση, δομή | ***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης*** | Διερευνητική μάθηση |
| ***Ενότητα*** | Γεωμετρία του επιπέδου | | | | |
| ***Μεγάλες Ιδέες*** | Μαθηματική Δομή | | | | |
| ***Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές*** | Οπτικοποίηση, δημιουργία συνδέσεων | ***Γενικά*** | Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές*** | Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και τη διαπραγμάτευση. | | μαθηματικού συλλογισμού | ***Προτεινόμενοι πόροι*** | Ψηφιακό εργαλείο: εφαρμογή Geogebra |
| | | ***Συγκείμενο*** | Κοινωνικό | | |

- Ανοίξτε τα μαθησιακό αντικείμενο με τίτλο 'Τυλίγοντας ένα σύρμα γύρω από ένα ορθογώνιο' στην παρακάτω διεύθυνση:
  http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/4414
- Κάντε κλικ στη δραστηριότητα 1 και διερευνήστε *αν μπορεί να τυλιχτεί ένα σύρμα 12 εκ., που έχει χωριστεί σε επιμέρους ευθύγραμμα τμήματα, γύρω από το τετράγωνο που είναι σχεδιασμένο στο πλέγμα.*
- Κάντε κλικ στη δραστηριότητα 2 και διερευνήστε: α) *Πώς πρέπει να χωριστεί ένα σύρμα 12 εκ. σε συγκεκριμένα τμήματα, ώστε να μπορεί να τυλιχτεί γύρω από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που είναι σχεδιασμένο στο πλέγμα; γ) Πόσα διαφορετικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα μπορείτε να κατασκευάσετε με το συγκεκριμένο σύρμα πάνω στο πλέγμα;*




**Εικόνα 6.** Τυλίγοντας ένα σύρμα γύρω από ένα ορθογώνιο

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης*: Σε αυτό το μαθηματικό έργο το πλέγμα που χρησιμοποιείται βοηθά τα παιδιά να κάνουν εύκολα μετρήσεις, ενώ το 'ξεδιπλωμένο σύρμα' συνδέει την περίμετρο με τη μέτρηση μήκους, η οποία προκύπτει από πρόσθεση. Παράλληλα, στην 1η δραστηριότητα, για να χωρίσουν κατάλληλα το σύρμα σε επιμέρους ευθύγραμμα τμήματα, οι μαθητές πρέπει να στηριχτούν στις ιδιότητες του τετραγώνου. Τέλος, μπορούν να ελέγξουν τις εικασίες τους ‘τυλίγοντας’ το σύρμα γύρω από το τετράγωνο.

Αντίστοιχα εργάζονται οι μαθητές στην περίπτωση του ορθογωνίου παραλληλογράμμου στη 2η δραστηριότητα. Μέσα από πειραματισμό αντιλαμβάνονται ότι η περίμετρος βασίζεται στο συνδυασμό των μηκών, ενώ διερευνούν τη σχέση μεταξύ των πλευρών του ορθογωνίου και της περιμέτρου του. Τέλος, οι μαθητές χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα- σύρμα για να κατασκευάσουν μια σειρά ισοπεριμετρικών ορθογώνιων παραλληλόγραμμων σχημάτων. Η δραστηριότητα αυτή δημιουργεί αναπαραστάσεις - διαισθήσεις που θα βοηθήσουν κατόπιν τους μαθητές στη διάκριση εμβαδού και περιμέτρου. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προεκτείνει τη διερεύνηση προς αυτή την κατεύθυνση με ερωτήσεις όπως: Θα είναι όλα τα εμβαδά ίδια; Γιατί ή γιατί όχι; Ποιο ορθογώνιο θα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Ποιο το μικρότερο;

Από τη συζήτηση που θα γίνει στην ολομέλεια οι μαθητές μπορεί να οδηγηθούν και στη διατύπωση του σχετικού τύπου, $Π = 2\ (π + μ)$ που τονίζει τον πολλαπλασιασμό του κάθε ζεύγους πλευρών ή τον τύπο $Π = 2π + 2μ$ που τονίζει ότι η περίμετρος βασίζεται στο συνδυασμό των μηκών.

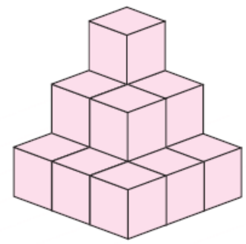
**Έργο 3:** Κατασκευές με κυβάκια
**Χαρακτηριστικά έργου**

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία - Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Μετασχηματιστικές δράσεις: οπτικοποίηση, αναπαράσταση<br><br>Δράσεις οικοδόμησης έννοιας: σύγκριση, δομή</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Διερευνητική μάθηση</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Γεωμετρία του χώρου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική Δομή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Οπτικοποίηση, δημιουργία συνδέσεων</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2">Χειραπτικό υλικό: κύβοι</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και τη διαπραγμάτευση.</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Κοινωνικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Με τα κυβάκια που έχετε μπροστά σας κατασκευάστε ένα κύβο με ακμή 2 κυβάκια. Πόσα κυβάκια χρειάζεστε;

Έχετε στη διάθεσή σας 50 κυβάκια. Θέλετε να κατασκευάσετε:

- ένα κύβο με ακμή 3 κυβάκια. Θα σας φτάσουν τα κυβάκια που έχετε; Αν ναι, πόσα θα σας περισσέψουν; Αν όχι, πόσα χρειάζεστε ακόμη; Ελέγξτε την εκτίμησή σας κατασκευάζοντας τον κύβο.
- ένα κύβο με ακμή 4 κυβάκια. Θα σας φτάσουν τα κυβάκια που έχετε; Αν ναι, πόσα θα σας περισσέψουν; Αν όχι, πόσα χρειάζεστε ακόμη; Ελέγξτε την εκτίμησή σας κατασκευάζοντας τον κύβο.
- Πόσα τουλάχιστον κυβάκια πρέπει να προστεθούν στην διπλανή κατασκευή ώστε να σχηματιστεί ένας κύβος; Ελέγξτε την εκτίμησή σας συμπληρώνοντας την κατασκευή.



- Φτιάξτε έναν κύβο με όποια διάσταση θέλετε. Πόσα κυβάκια πρέπει να προσθέσετε ή να αφαιρέσετε στην κατασκευή σας για να φτιάξετε ένα κύβο με ακμή 3 κυβάκια, 6 κυβάκια, 9 κυβάκια;
- Πώς μπορείτε να υπολογίσετε σύντομα πόσα κυβάκια χρειάζεστε για κάθε κύβο που κατασκευάζετε;

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης*: Οι παραπάνω δραστηριότητες εξοικειώνουν τους μαθητές με τη μέτρηση όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέσω σύγκρισης με μια μη τυπική μονάδα που έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το μέγεθος που θέλουμε να μετρηθεί. Οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες οπτικοποίησης, εικασίας, εκτίμησης και ελέγχου των διαισθήσεων τους μέσω κατασκευών με χειραπτικό υλικό. Στόχος είναι να οδηγηθούν τα παιδιά στην ανακάλυψη της πολλαπλασιαστικής σχέσης που συνδέει τις γραμμικές διαστάσεις του κύβου με τη μέτρηση του όγκου του με κυβικές μονάδες μέσω ανάλυσης και σύνθεσης του εν λόγω στερεού.

Αντίστοιχες κατασκευαστικές δραστηριότητες με κυβικές μονάδες μπορούν να αναπτυχθούν και για το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή, ώστε να μεταβάλουμε μία-μία τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που ζητάμε να κατασκευάσουν οι μαθητές. Επίσης, μπορούμε να δώσουμε συγκεκριμένο αριθμό από κυβάκια, π.χ. 64 κυβάκια, και να ζητήσουμε από τους μαθητές να φτιάξουν όσα περισσότερα διαφορετικά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα μπορούν. Στο πλαίσιο αυτής της δραστηριότητας μπορεί να συζητηθεί και το αν ο κύβος περιλαμβάνεται στα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που μπορούν να κατασκευαστούν.

## 3. ΠΕΔΙΟ ΙΙΙ: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

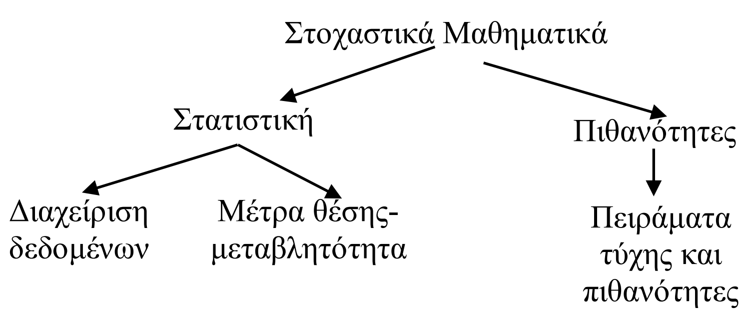
### ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ & ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

### 3.1 Σημασία του πεδίου

Ο πολίτης κατακλύζεται καθημερινά από στατιστικές πληροφορίες. Στις δημοσκοπήσεις, τις οικονομικές αναλύσεις, τις επιστημονικές ανακοινώσεις, τις κοινωνικές μελέτες, τα μετεωρολογικά δελτία, χρησιμοποιούνται στατιστικά διαγράμματα και δείκτες ώστε να παρουσιαστούν, να αναλυθούν και να ερμηνευτούν τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί με σκοπό την λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας. Τις στατιστικές μεθόδους τις χρησιμοποιεί σχεδόν το σύνολο των επιστημονικών κλάδων, με σκοπό να εξαχθούν συμπεράσματα και να θεμελιωθούν προβλέψεις με βάση την πληροφορία που διαθέτουμε.

Βασικός σκοπός της διδασκαλίας των Στοχαστικών Μαθηματικών (Στατιστική, Πιθανότητες) είναι να προετοιμάσει τον μαθητή-μελλοντικό πολίτη να αξιολογεί κριτικά πληροφορίες, να εξάγει συμπεράσματα, να κάνει προβλέψεις και να λαμβάνει αποφάσεις κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας (Garfield & Ben-Zvi, 2007, 2008). Η διατύπωση ερωτήσεων, η συλλογή σχετικών δεδομένων και η ανάλυσή τους στο πλαίσιο του προβλήματος που έχει τεθεί παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να διερευνούν ζητήματα που τους ενδιαφέρουν και να μπορούν με τη βοήθεια των στοχαστικών μαθηματικών να τα περιγράφουν και να τα συζητούν (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry, & Scheaffer, 2005; Weilard, 2017).

Η εισαγωγή των Στοχαστικών Μαθηματικών από την πρώτη σχολική ηλικία αποτελεί ένα νέο στοιχείο στο πρόγραμμα σπουδών. Η αλλαγή αυτή επιτρέπει τη σταδιακή ανάπτυξη της στοχαστικής σκέψης των μαθητών και μπορεί να εξασφαλίσει μία καλύτερη κατανόηση των στοχαστικών εννοιών στην πορεία της μαθηματικής τους εκπαίδευσης. Η πρόταση έχει στηριχτεί σε σχετικές έρευνες στη διεθνή βιβλιογραφία, οι οποίες αναφέρουν πως τα παιδιά σε αυτήν την ηλικία ως «μικροί ερευνητές» είναι σε θέση να διαχειριστούν προβλήματα στοχαστικών μαθηματικών (English, 2012; Konold, Higgins, Russell,& Khalil, 2015; Shaughnessy, 2007).



Το πεδίο των Στοχαστικών Μαθηματικών περιλαμβάνει τη Στατιστική και τις Πιθανότητες. Η Στατιστική στο Δημοτικό Σχολείο αναπτύσσεται σε δύο θεματικές ενότητες, την ενότητα «διαχείριση δεδομένων» και την ενότητα «μέτρα θέσης -μεταβλητότητα», ενώ οι Πιθανότητες αναπτύσσονται σε μία θεματική ενότητα, των «πειράματα τύχης και πιθανότητες».

**(α) Στατιστική:** Στο Δημοτικό σχολείο η διδασκαλία της Στατιστικής μπορεί να απεγκλωβιστεί από την εκμάθηση εκτέλεσης αλγορίθμων και κατασκευής αναπαραστάσεων χωρίς νόημα και να παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν τη στατιστική τους σκέψη μέσα από την πραγματοποίηση πειραμάτων ή μικρών ερευνών στο οικείο περιβάλλον τους.

Η ενότητα *«Διαχείριση δεδομένων»* αφορά στη διατύπωση στατιστικών ερωτημάτων και την αντίστοιχη συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων. Οι μαθητές του Δημοτικού Σχολείου μπορούν να κατανοήσουν ότι τα δεδομένα είναι κάτι περισσότερο από απλοί αριθμοί και αποτελούν πληροφορίες που παράγονται σε σχέση με μια συγκεκριμένη κατάσταση. Μαθαίνουν να γνωρίζουν ποια δεδομένα χρειάζεται να συλλέξουν για να απαντήσουν σε ένα ερώτημα, πώς θα τα αποκτήσουν, τρόπους που μπορούν να τα οργανώσουν, να τα αναπαραστήσουν και να τα παρουσιάσουν, με σκοπό την εξαγωγή κάποιων βασικών συμπερασμάτων. Ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουν στη διάθεσή τους, μαθαίνουν να κατασκευάζουν απλά διαγράμματα (εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα, φυλλογράμματα και κυκλικά διαγράμματα).

Στην ενότητα *«Μέτρα θέσης-μεταβλητότητα»* τα παιδιά μαθαίνουν να προσδιορίζουν στατιστικά μέτρα θέσης, όπως η επικρατούσα τιμή, η διάμεσος και ο μέσος όρος με σκοπό να περιγράψουν με συνοπτικό τρόπο τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί και το εύρος για να περιγράψουν τη μεταβλητότητα των δεδομένων. Στις μικρές ηλικίες είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν τη φυσική μεταβλητότητα στις τιμές μεταξύ διαφορετικών ατόμων και ομάδων και να λαμβάνουν αποφάσεις στηριζόμενα σε επιχειρήματα με βάση τα δεδομένα που έχουν στη διάθεσή τους.

**(β) Πιθανότητες:** Η διδασκαλία των Πιθανοτήτων στο Δημοτικό Σχολείο επιτρέπει στους μαθητές να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται την αβεβαιότητα διαφόρων γεγονότων και να αναπτύσσουν την ικανότητα της πρόβλεψης. Τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να πραγματοποιήσουν πειράματα τύχης ενός ή δύο σταδίων, να κάνουν προβλέψεις και να συγκρίνουν τις προβλέψεις τους με την καταγραφή όλων των δυνατών αποτελεσμάτων. Επίσης, διερευνούν τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης όταν αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές, παρατηρώντας τις διαφορές που υπάρχουν ανάλογα με τον αριθμό των δοκιμών. Αναπτύσσουν σταδιακά τη γλώσσα των πιθανοτήτων για να περιγράψουν γεγονότα και να συγκρίνουν την εμφάνιση ενδεχομένων σε απλά πειράματα τύχης και μαθαίνουν να εκτιμούν και να προσδιορίζουν αριθμητικά την πιθανότητα στηριζόμενα στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Η σύγκριση της σχετικής συχνότητας εμφάνισης ενός ενδεχομένου με την πιθανότητα εμφάνισής του με βάση τον κλασικό ορισμό επιτρέπει στους μαθητές να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται τη διαφορά ανάμεσα στα πραγματικά και τα προβλεπόμενα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης.

### 3.2. Ανάπτυξη των ΠΜΑ στο πεδίο «Στοχαστικά Μαθηματικά»

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει το μαθηματικό περιεχόμενο των ΠΜΑ που αφορούν τη Στατιστική και τις Πιθανότητες στο Δημοτικό Σχολείο στο νέο ΠΣ, καθώς και την οργάνωση και κατανομή τους κατά θεματική ενότητα και υπο-ενότητα.

| Υπο-πεδίο | Θεματικές ενότητες | Θεματικές υπο-ενότητες |
|---|---|---|
| | | |
| ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ | Διαχείριση δεδομένων | *Διατύπωση ερωτημάτων* |
| | | *Συλλογή* |
| | | *Αναπαράσταση* |
| | | *Ερμηνεία* |
| | | |
| | Μέτρα θέσης - Μεταβλητότητα | |
| | | |
| | Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δυο μεταβλητών | |
| | | |
| ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ | Πειράματα τύχης | *Δειγματικοί χώροι* |
| | | *Πιθανότητες ενδεχομένων* |
| | Συσχέτιση | |

**(α) Στατιστική:** Η Στατιστική στο Δημοτικό Σχολείο αναπτύσσεται σε δύο θεματικές ενότητες, της «διαχείρισης δεδομένων» και των «μέτρων θέσης -μεταβλητότητα». Η πρώτη θεματική ενότητα *«διαχείριση δεδομένων»* περιλαμβάνει τέσσερις υπο-ενότητες: α) διατύπωση ερωτημάτων, β) συλλογή, γ) αναπαράσταση και δ) ερμηνεία.

Στο Δημοτικό σχολείο η υπο-ενότητα «διατύπωση ερωτημάτων» εξελίσσεται σταδιακά και περιλαμβάνει:

— ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα (Α΄ Δημοτικού),

— ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά δεδομένα (Β’ Δημοτικού),

— ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά ή κατηγορικά δεδομένα (Γ’ Δημοτικού),

— ερωτήματα που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους (Δ΄ Δημοτικού),

— ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα τα οποία ομαδοποιούνται (Ε΄ Δημοτικού),

— ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνδυασμό διακριτών ποσοτικών και κατηγορικών δεδομένων (ΣΤ’ Δημοτικού).

Η «συλλογή δεδομένων» στην Α’, Β’ και Γ’ τάξη πραγματοποιείται μέσω μικρών ερευνών στο οικείο περιβάλλον τους για ένα συγκεκριμένο ερώτημα και η οργάνωσή τους γίνεται με τη βοήθεια χειραπτικών υλικών, με καταμέτρηση με γραμμές και με απλούς πίνακες καταγραφής των συχνοτήτων. Στις επόμενες τάξεις οι μαθητές μπορούν να συλλέγουν δεδομένα από δύο μικρές ομάδες μέσω ερευνών ή πειραμάτων μικρής κλίμακας ή μετρήσεων και να τα οργανώνουν με πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

Οι «τρόποι αναπαράστασης» των δεδομένων που χρησιμοποιούν οι μαθητές εξελίσσονται από τους πιο απλούς σε πιο σύνθετους:

— εικονόγραμμα και ραβδόγραμμα συχνοτήτων για την αναπαράσταση κατηγορικών δεδομένων (Α΄ Δημοτικού),

— σημειόγραμμα για την αναπαράσταση διακριτών ποσοτικών δεδομένων (Β΄ Δημοτικού),

— διαγράμματα, στα οποία η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσωπεύει πολλαπλάσια του ένα (Γ΄ Δημοτικού),

— διαγράμματα για την αναπαράσταση κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων για δύο ομάδες δεδομένων (Δ΄ Δημοτικού),

— φυλλόγραμμα για την αναπαράσταση ποσοτικών δεδομένων που ομαδοποιούνται (Ε' Δημοτικού),

— κυκλικό διάγραμμα (ΣΤ΄ Δημοτικού).

Τέλος, ανάλογα με την τάξη τους, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να «ερμηνεύουν δεδομένα», διερευνώντας πληροφορίες στις διαφορετικές αναπαραστάσεις δεδομένων με τις οποίες έχουν ασχοληθεί και να εξάγουν απλά συμπεράσματα με βάση το πρόβλημα που μελετούν.

Η δεύτερη θεματική ενότητα της Στατιστικής, *«μέτρα θέσης-μεταβλητότητα»*, αφορά στη χρήση αριθμητικών εκφράσεων, οι οποίες επιτρέπουν τη συνοπτική περιγραφή δεδομένων, προερχόμενα από ποσοτικά χαρακτηριστικά, καθώς και τη σύγκριση ομάδων δεδομένων με βάση αυτά. Τα μέτρα που εισάγονται σταδιακά από την Γ΄ Δημοτικού είναι:

— η επικρατούσα τιμή και το εύρος (Γ΄ Δημοτικού),

— η διάμεσος (Δ΄ Δημοτικού),

— η μέση τιμή (Ε΄ Δημοτικού).

**(β) Πιθανότητες:** Οι Πιθανότητες αναπτύσσονται σε μία θεματική ενότητα, *«πειράματα τύχης και πιθανότητες»*, η οποία περιλαμβάνει δύο υπο-ενότητες: «δειγματικοί χώροι» και «πιθανότητες ενδεχομένων».

Η πρώτη θεματική υπο-ενότητα «δειγματικοί χώροι» αναφέρεται στην πραγματοποίηση πειραμάτων που μπορεί να επαναληφθούν πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες και των οποίων τα αποτελέσματα δεν είναι προβλέψιμα. Η εμπλοκή των μαθητών σε πειράματα τύχης περιλαμβάνει:

— την πραγματοποίηση απλών πειραμάτων τύχης ενός σταδίου (π.χ. ρίψη ενός ζαριού) και εύρεση του συνόλου των δυνατών αποτελεσμάτων τους (Α΄τάξη),

— την εύρεση συνδυασμών και διατάξεων ενός μικρού αριθμού αντικειμένων (Β΄τάξη),

— την πραγματοποίηση πειραμάτων τύχης δύο σταδίων (π.χ. ρίψη δύο ζαριών) και εύρεση του συνόλου των δυνατών αποτελεσμάτων τους (ΣΤ΄Δημοτικού).

Η δεύτερη θεματική υπο-ενότητα «πιθανότητες ενδεχομένων» αφορά στον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου και περιλαμβάνει:

— τον χαρακτηρισμό ενός ενδεχομένου ως βέβαιο, πιθανό ή αδύνατο και ενός παιχνιδιού τύχης ως δίκαιο-άδικο (Α’ Δημοτικού),

— τη σύγκριση της πιθανότητας εμφάνισης ενδεχομένων (λιγότερο/περισσότερο πιθανό, ισοπίθανο) (Β’ Δημοτικού),

— τη σύγκριση της πιθανότητας εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές (Γ’ Δημοτικού),

— την εκτίμηση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με εύρος από αδύνατο ως βέβαιο ενδεχόμενο(Δ’ Δημοτικού),

— τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου ως κλάσμα και την αναπαράστασή της σε κλίμακα από 0 έως 1 (Ε’ Δημοτικού),

— τη σύγκριση της πιθανότητας ως κλάσμα με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης (ΣΤ’ Δημοτικού).

### 3.3 Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες μαθητών στο πεδίο «Στοχαστικά Μαθηματικά»

**(α) Στατιστική:** Η ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης στηρίζεται κυρίως στην επίλυση στατιστικών προβλημάτων μέσω μιας διερευνητικής διαδικασίας που περιλαμβάνει τέσσερις φάσεις (Franklin, et al., 2005):

- Διευκρίνηση του ερευνητικού προβλήματος και διατύπωση ερωτήσεων που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα

Σε άλλα θεματικά πεδία τα ερωτήματα που θέτουν τα παιδιά μπορεί να απαντηθούν άμεσα (π.χ. πόσα παιδιά έχει η τάξη μου; πόσα τρίγωνα βλέπεις στη εικόνα;), χωρίς τη συλλογή δεδομένων. Οι ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα αναγνωρίζουν τη σημασία της μεταβλητότητας, δηλαδή την διαφορετικότητα που υπάρχει γύρω μας (π.χ. τα άτομα διαφέρουν, οι συνθήκες ενός πειράματος διαφέρουν). Τα δεδομένα μπορεί να προέρχονται από κατηγορικά ή διακριτά ποσοτικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη πληθυσμού. Στα κατηγορικά δεδομένα οι απαντήσεις στα ερωτήματα που διατυπώνονται δεν είναι αριθμοί (π.χ. παιχνίδια, χρώματα κ.λπ.,), ενώ στα διακριτά ποσοτικά δεδομένα οι απαντήσεις είναι ακέραιοι αριθμοί (π.χ. αριθμός δωματίων μιας κατοικίας, αριθμός παιδιών μιας οικογένειας).

- Συλλογή και οργάνωση δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων συνδέεται με το ερώτημα που έχει τεθεί. Τα παιδιά στις μικρές ηλικίες συλλέγουν δεδομένα από μικρούς πληθυσμούς στο οικείο περιβάλλον τους, όπως ο πληθυσμός της τάξης τους ή δύο τάξεων στο σχολείο τους. Η συλλογή των δεδομένων στηρίζεται σε μικρές έρευνες για ένα θέμα που τους ενδιαφέρει (π.χ. το αγαπημένο τους ομαδικό παιχνίδι) ή σε απλές μετρήσεις (π.χ. το ύψος τους) ή σε δεδομένα που προέρχονται από πειράματα τύχης που επαναλαμβάνονται πολλές φορές.

- Ανάλυση των δεδομένων με χρήση κατάλληλων γραφικών αναπαραστάσεων και στατιστικών μέτρων

Τα εμπειρικά δεδομένα που έχουν συλλεχθεί μπορούν να περιγραφούν με κάποιον συνοπτικό τρόπο, χωρίς να χαθεί η πληροφορία που παρέχουν. Η συνοπτική αυτή παρουσίαση μπορεί να στηρίζεται σε γραφικές αναπαραστάσεις, καθώς και σε αριθμητικές μεθόδους (π.χ. μέτρα θέσης). Η επιλογή διαγραμμάτων και στατιστικών μέτρων συνδέεται με το είδος των δεδομένων που έχουν συλλεχθεί.

- Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και απάντηση των αρχικών ερευνητικών ερωτημάτων

Η ερμηνεία των αποτελεσμάτων είναι πολύ σημαντική, καθώς από τα διαγράμματα και τα στατιστικά μέτρα εξάγονται απλά συμπεράσματα, τα οποία απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί. Επίσης, τα παιδιά στις μικρές ηλικίες διατυπώνουν προβλέψεις, στηριζόμενα σε άτυπους συλλογισμούς για να αντιληφθούν τη μεταβλητότητα που παρατηρείται (English, 2012; Oslington, Mulligan, & Bergen, 2020).

- *Ενότητα «Διαχείριση δεδομένων»*

Στην Α΄ και Β΄ τάξη τα παιδιά με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού διατυπώνουν ερωτήματα που προκαλούν το ενδιαφέρον τους και η διερεύνηση των οποίων περιορίζεται στον πληθυσμό της τάξης τους. Οι μαθητές πραγματοποιούν μια απογραφή στην τάξη και κατανοούν την άτομο προς άτομο φυσική μεταβλητότητα στις τιμές. Ανάλογα με τα ερωτήματα που διατυπώνονται, οι μαθητές αρχίζουν να αποκτούν εμπειρίες για να διακρίνουν ερωτήματα που μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο στατιστικής επεξεργασίας. Είναι σημαντικό να δοθεί η ευκαιρία στα

π

α

ι

δ

Όταν συλλέγουν δεδομένα οι μαθητές δυσκολεύονται μερικές φορές να αντιληφθούν ότι ο αριθμός των μονάδων του πληθυσμού (π.χ. ο αριθμός των μαθητών που συμμετέχουν σε μια έρευνα) είναι ίδιος με τον αριθμό των δεδομένων (π.χ. κάθε μαθητής απαντά μία φορά). Επίσης, στην περίπτωση των διακριτών ποσοτικών δεδομένων χρειάζεται να κατανοήσουν τα διαφορετικά νοήματα των αριθμών κατά την καταγραφή των δεδομένων: κάποιοι αριθμοί δείχνουν την τιμή των δεδομένων και κάποιοι άλλοι πόσο συχνά εμφανίζεται μία τιμή (Franklin & Mewborn, 2008).

σ

Τα προτεινόμενα διαγράμματα σε αυτές τις τάξεις (εικονογράμματα, ραβδογράμματα**,** σημειογράμματα) αφορούν απλές μορφές αναπαράστασης δεδομένων και η κατασκευή τους στηρίζεται στην ένα προς ένα αντιστοίχιση. Ένα ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται συνήθως για να συνοψίσει κατηγορικά δεδομένα και ένα σημειόγραμμα για διακριτά ποσοτικά δεδομένα. Η ανάγνωση και κατανόηση ενός γραφήματος περιλαμβάνει: α) την εύρεση των πληροφοριών για συγκεκριμένες τιμές της μεταβλητής (π.χ. πόσα παιδιά προτιμούν το ποδόσφαιρο;), β) την εύρεση σχέσεων μεταξύ των δεδομένων με τη βοήθεια συγκρίσεων και πράξεων (π.χ. πόσα περισσότερα παιδιά προτιμούν το ποδόσφαιρο σε σχέση με το μπάσκετ;) και γ) την ερμηνεία σχέσεων πέρα από τα δεδομένα, κάνοντας άτυπες προβλέψεις σε απλά ερωτήματα (π.χ. Αν αύριο ερχόταν ένα άλλο παιδί στην τάξη σας, ποιο παιχνίδι πιστεύετε ότι θα προτιμούσε;) (Friel, Bright & Curcio, 1997).

τ

ρ

ό

π

ο

Στη Γ΄ και Δ΄ τάξη οι μαθητές διατυπώνουν τις δικές τους ερωτήσεις που δεν αφορούν μόνο στον πληθυσμό της τάξη τους, αλλά αρχίζουν να συγκρίνουν τη μεταβλητότητα των δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους (π.χ. μέχρι 25-30 άτομα η καθεμία). Τα παιδιά κατασκευάζουν διαγράμματα στα οποία η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσωπεύει πολλαπλάσια του ένα. Η δυσκολία κατασκευής αυτών των διαγραμμάτων συνδέεται με την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής τους σκέψης, ενώ πολλές φορές οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι στο εικονόγραμμα χρησιμοποιούνται διαφορετικά μεγέθη μίας εικόνας για να αναπαραστήσουν διαφορετικές ποσότητες (Wu, 2004).

Στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη οι μαθητές διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα τα οποία ομαδοποιούνται (π. χ. τα ύψη τους). Επιπλέον, συζητούν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνδυασμό διακριτών ποσοτικών και κατηγορικών δεδομένων. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορεί να κατασκευάσουν ένα ερωτηματολόγιο για να διερευνήσουν τη χρήση του Η/Υ στην καθημερινότητά τους στο σπίτι. Μπορούν να διατυπώσουν ερωτήματα όπως τα παρακάτω: Έχεις προσωπικό Η/Υ στο δωμάτιό σου; Όταν χρησιμοποιείς τον Η/Υ ενημερώνεις τους γονείς σου; Γιατί χρησιμοποιείς τον Η/Υ στο σπίτι; Πόσες ώρες χρησιμοποιείς Η/Υ στο σπίτι καθημερινά; Οργανώνουν τα δεδομένα κατασκευάζοντας πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων τους οποίους μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να συγκρίνουν δεδομένα από δύο μικρές ομάδες. Οι σχετικές συχνότητες βοηθούν στη σύγκριση ομάδων ποσοτικών δεδομένων, ιδιαίτερα όταν το πλήθος των δεδομένων είναι διαφορετικό σε κάθε ομάδα.

Επίσης, τα παιδιά μαθαίνουν να κατασκευάζουν φυλλογράμματα και απλά κυκλικά διαγράμματα. Τα φυλλογράμματα βοηθούν τα παιδιά να εισαχθούν σε ομαδοποιήσεις, ενώ ταυτόχρονα δείχνουν τις τιμές όλων των δεδομένων (βλ. αντίστοιχο έργο). Η κατασκευή των κυκλικών διαγραμμάτων απαιτεί τη γνώση των ποσοστών και πολλά λάθη των παιδιών οφείλονται στην μετατροπή των απόλυτων συχνοτήτων σε ποσοστά. επίσης, οι μαθητές χρειάζεται να κατανοήσουν ότι το άθροισμα ων ποσοστών σε ένα κυκλικό διάγραμμα είναι 100% (Wu, 2004). Ακόμα, τα παιδιά εξελίσσουν τη γνώση τους κατασκευάζοντας ραβδογράμματα με σχετικές συχνότητες.

Σε όλες τις τάξεις οι μαθητές είναι σε θέση να διερευνήσουν πληροφορίες, να εξάγουν αρχικά συμπεράσματα, και να αντιληφθούν πως λόγω της ύπαρξης μεταβλητότητας στα δεδομένα υπάρχει αβεβαιότητα στη διατύπωση μελλοντικών προβλέψεων. Επίσης, διαπιστώνουν ότι τα αποτελέσματα μιας μικρής έρευνας μπορεί να διαφοροποιούνται σε μικρές ομάδες ατόμων ή πολλών δοκιμών σε ένα πείραμα τύχης.

- *Ενότητα «Μέτρα θέσης-μεταβλητότητα»*

Από την Γ’ και την Δ’ τάξη του Δημοτικού Σχολείου ξεκινά η ενασχόληση των παιδιών με στατιστικά μέτρα, τα οποία αφορούν σε ποσοτικά δεδομένα. Στην Γ’ τάξη τα παιδιά μαθαίνουν να αναλύουν δεδομένα προσδιορίζοντας την επικρατούσα τιμή και το εύρος των δεδομένων. Σχετικά με την επικρατούσα τιμή, το πιο συνηθισμένο λάθος των παιδιών είναι ότι αντιστοιχούν σε αυτή τη μεγαλύτερη συχνότητα και όχι την τιμή της μεταβλητής που αντιστοιχεί σε αυτή. Το εύρος των δεδομένων υπολογίζεται αν αφαιρέσουν από τη μεγαλύτερη τιμή της μεταβλητής την μικρότερη. Στην Δ’ Δημοτικού οι μαθητές ασχολούνται με τη διάμεσο. Κάποια λάθη των παιδιών στη διάμεσο συνδέονται με τον υπολογισμό της, καθώς την υπολογίζουν χωρίς να ταξινομήσουν τους αριθμούς διαιρώντας το πλήθος των παρατηρήσεων με το 2 ή βρίσκουν το ημι-άθροισμα του πρώτου και του τελευταίου αριθμού, όταν οι τιμές της μεταβλητής είναι ταξινομημένες (Shaughnessy, 1992).

Στις τάξεις αυτές η πραγματοποίηση άτυπων προβλέψεων των παιδιών μπορεί να στηρίζεται στα μέτρα που έχουν μάθει, όπως να αναγνωρίζουν το μέγεθος της μεταβλητότητας των παρατηρούμενων τιμών μέσω του εύρους (Oslington, Mulligan, & Bergen, 2020). Σε αυτήν την ηλικία οι μαθητές αρχίζουν να παρατηρούν ένα σύνολο δεδομένων ως μια ολότητα και αντιλαμβάνονται ότι υπάρχουν διάφορα χαρακτηριστικά που μπορούν να επισημάνουν, όπως ασυνήθιστες τιμές, τιμές χωρίς δεδομένα, τιμές συγκέντρωσης πολλών δεδομένων (Konold et al., 2015).

Στην Ε' και ΣΤ' Δημοτικού εισάγεται και ο μέσος όρος των δεδομένων, ο οποίος γίνεται αντιληπτός ως δίκαιη μοιρασιά (π.χ. πόσα γράμματα θα είχαν τα ονόματα των μαθητών, αν όλα τα ονόματα είχαν τον ίδιο αριθμό γραμμάτων;) (Franklin et al., 2005). Πολλές φορές, ενώ οι μαθητές μπορούν να μάθουν πώς να υπολογίζουν τα μέτρα θέσης, δεν συνειδητοποιούν τι αντιπροσωπεύουν σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του συνόλου των δεδομένων. Είναι σημαντικό να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ερμηνεύουν τα δεδομένα αξιοποιώντας όλα τα μέτρα θέσης που μαθαίνουν στο πλαίσιο του αντίστοιχου έργου. Ιδιαίτερα για το μέσο όρο, τα παιδιά χρειάζεται να κατανοήσουν ότι επηρεάζεται από όλες τις τιμές μια μεταβλητής, ενώ ο ίδιος ο μέσος όρος δεν είναι απαραίτητα μια τιμή της μεταβλητής ((Shaughnessy, 2007).

**(β) Πιθανότητες:** Περιλαμβάνει δυο υπο-ενότητες, των «δειγματικών χώρων» και των «πιθανοτήτων ενδεχομένων».

- *Ενότητα «Δειγματικοί χώροι»*

Στις μικρές τάξεις οι μαθητές εμπλέκονται σε απλές πιθανολογικές καταστάσεις, προκειμένου να βρουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε ένα στάδιο (π.χ. η ρίψη ενός ζαριού). Η βασική δυσκολία των μαθητών είναι ότι οι απαντήσεις τους βασίζονται σε υποκειμενικές κρίσεις (Jones, Langrall, Thornton, Mogill, 1997, 1999). Για παράδειγμα, οι μαθητές δεν κάνουν μια ολοκληρωμένη περιγραφή των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης, αλλά αναφέρουν συνήθως τα αποτελέσματα που θεωρούν ότι είναι πιο πιθανά να συμβούν σύμφωνα με τις προσωπικές τους επιθυμίες ή κρίσεις (π.χ. απαντούν ότι ο μόνος αριθμός που προκύπτει κατά τη ρίψη ενός ζαριού είναι το 6, διότι είναι ο τυχερός τους αριθμός). Επίσης, εμπλέκονται στην εύρεση των συνδυασμών ενός μικρού αριθμού αντικειμένων (2 έως 4 αντικείμενα) στους οποίους η σειρά των στοιχείων μπορεί να έχει σημασία (διατάξεις) ή να μην έχει. Μια δυσκολία των παιδιών στην εύρεση συνδυασμών είναι η επανάληψη του ίδιου συνδυασμού πολλές φορές και η μη καταγραφή συνδυασμών με τα ίδια στοιχεία, αν αυτό επιτρέπεται στο αντίστοιχο πρόβλημα (English, 2005).

Τέλος, στην Στ΄ τάξη εισάγεται η περιγραφή όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης δύο σταδίων, η οποία έχει αρκετές απαιτήσεις για τους μαθητές. Πρέπει να λάβουν υπόψη τους ότι σε κάθε αποτέλεσμα παίζει ρόλο η σειρά εμφάνισης των επιμέρους στοιχείων του και χρειάζεται να βρουν ένα συστηματικό τρόπο καταγραφής των αποτελεσμάτων (Jones & Langrall, 2007).

- *Ενότητα «Πιθανότητες ενδεχομένων»*

Στην Α' και Β΄ τάξη οι μαθητές αναπτύσσουν άτυπα τη γλώσσα των πιθανοτήτων για να περιγράψουν γεγονότα και να συγκρίνουν την εμφάνιση ενδεχομένων σε απλά πειράματα τύχης. Περιγράφουν ένα γεγονός της καθημερινής τους εμπειρίας ως βέβαιο, αδύνατο, πιθανό με τη βοήθεια των λέξεων πάντα, ποτέ και μερικές φορές. Μια παρανόηση των μαθητών είναι ότι ταυτίζουν τη λέξη αδύνατο με τη μικρή πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος (Jones & Langrall, 2007). Στην Β' τάξη επεκτείνουν τις γνώσεις τους στη σύγκριση της πιθανότητας εμφάνισης ενός ενδεχομένου, χαρακτηρίζοντάς το ως λιγότερο πιθανό, περισσότερο πιθανό ή ισοπίθανο. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, η βασική δυσκολία των μαθητών είναι ότι οι απαντήσεις τους βασίζονται σε υποκειμενικές κρίσεις (Jones et al., 1997, 1999). Για παράδειγμα, από ένα κουτί με 3 κόκκινους και 5 μπλε κύβους θεωρούν ότι είναι πιο πιθανό να τραβήξουν ένα κόκκινο κύβο, γιατί το κόκκινο είναι το αγαπημένο τους χρώμα.

Στην Γ΄ και Δ΄ τάξη οι μαθητές συγκρίνουν την πιθανότητα εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές σε απλά πειράματα τύχης και συζητούν τις διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στις προβλέψεις τους και τα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την πραγματοποίησή τους. Είναι σημαντικό να τους δοθεί η ευκαιρία να διερευνούν τη συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά την επανάληψη ενός πειράματος τύχης πολλές φορές πραγματοποιώντας διαφορετικούς αριθμούς δοκιμών. Με αυτόν τον τρόπο αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τη σχέση του αριθμού των δοκιμών ενός πειράματος τύχης με τα αποτελέσματα που προκύπτουν, καθώς μία παρανόηση των μαθητών είναι ότι θεωρούν ότι θα προκύψουν ανάλογα αποτελέσματα (π.χ. μισές φορές κορώνα και μισές φορές γράμματα) ανεξάρτητα από τον αριθμό των δοκιμών (Jones & Langrall, 2007).

Επίσης, στην Δ΄ τάξη οι μαθητές προσεγγίζουν την πιθανότητα ως μέτρο εμφάνισης ενός ενδεχομένου μέσω εκτίμησης με χρήση κλίμακας. Πολλές φορές σε αυτές τις εκτιμήσεις οι μαθητές χρησιμοποιούν τη φράση «50-50» για να περιγράψουν ότι ένα ενδεχόμενο είναι πιθανό να συμβεί και όχι ως μέτρο της πιθανότητας εμφάνισής του (Jones & Langrall, 2007).

Στην Ε΄ και Στ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου οι μαθητές μελετούν συστηματικά τον υπολογισμό πιθανοτήτων, καθώς εκφράζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με κλάσματα ή ποσοστά. Η έκφραση της πιθανότητας με κλάσματα προϋποθέτει καλή γνώση των ρητών αριθμών. Επίσης, συγκρίνουν την πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου με βάση τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων / πλήθος δυνατών περιπτώσεων) με τη σχετική συχνότητα εμφάνισής του με βάση τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης σε πολλές δοκιμές (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων στις δοκιμές/ πλήθος δοκιμών), όταν όλα τα δυνατά αποτελέσματα θεωρούνται ισοπίθανα.

## 3.4. Ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες διδακτικής διαχείρισης/ανάπτυξης μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη

**(α) Στατιστική:** Στην Στατιστική παρουσιάζονται τρία ενδεικτικά παραδείγματα έργων που εντάσσονται στην ενότητα «διαχείριση δεδομένων» σε διαφορετικές τάξεις.

**<u>Α΄ & Β΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου</u>**

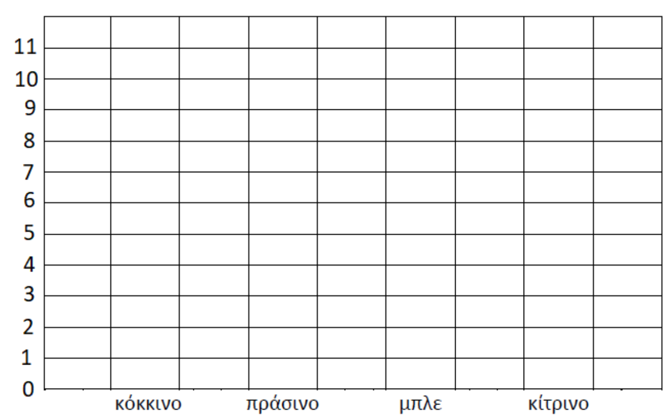
**Έργο 1***: Τα αγαπημένα μας χρώματα*

Πλησιάζουν οι απόκριες και θέλετε να στολίσετε την τάξη σας με χρωματιστά μπαλόνια.

- Ποιο είναι το αγαπημένο χρώμα των παιδιών της τάξης σας; Πώς θα το βρείτε; Μπορείτε να διαλέξετε κόκκινο, πράσινο, μπλε ή κίτρινο χρώμα.
- Να συμπληρώσετε με γραμμές τον παρακάτω πίνακα. Για κάθε παιδί σημειώνετε μία γραμμή (Ι) για το χρώμα που διάλεξε.

| | Γραμμές | Μετράμε τις γραμμές |
|---|---|---|
| κόκκινο | | |
| πράσινο | | |
| μπλε | | |
| κίτρινο | | |

- Να κατασκευάσετε ένα ραβδόγραμμα (σε ομάδες). Για κάθε παιδί ζωγραφίζετε ένα κουτάκι για το χρώμα που διάλεξε.




Ποιο χρώμα προτιμούν τα περισσότερα παιδιά της τάξης;

Ποιο χρώμα προτιμούν τα λιγότερα παιδιά της τάξης;

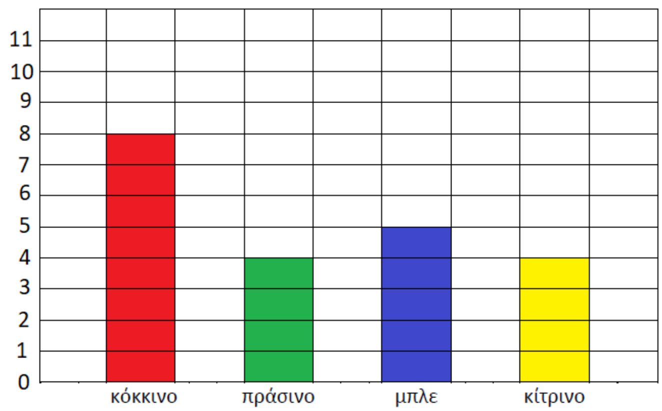
Ποια απόφαση θα πάρετε για το χρώμα των μπαλονιών που θα χρησιμοποιήσετε στην τάξη σας;

Αν ρωτούσατε τα παιδιά μιας άλλης τάξης, θα ήταν ίδια τα αποτελέσματα; Γιατί;

***Χαρακτηριστικά έργου***

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στατιστική</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση, αναπαράσταση)</td><td rowspan="4">Χαρακ/στικά διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Διερευνητική</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Διαχείριση δεδομένων</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Οπτικοποίηση</td><td rowspan="2">Γενικά</td><td rowspan="2">Μαθηματική επικοινωνία</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση</td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td>Χειραπτικά υλικά</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Κοινωνία</td><td></td><td></td></tr>
</table>

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης:* Η δραστηριότητα αποσκοπεί στην εμπλοκή των μαθητών σε μια μικρή έρευνα στην τάξη τους προκειμένου να διατυπώσουν ερωτήματα, να συλλέξουν, να οργανώσουν, να αναπαραστήσουν κατηγορικά δεδομένα και να τα ερμηνεύσουν. Αρχικά, οι μαθητές συζητούν για την οργάνωση μιας γιορτής και διατυπώνουν ερωτήματα που θα τους απασχολούσαν για να γνωρίσουν τις προτιμήσεις των συμμαθητών τους, π.χ. ποιο είναι το αγαπημένο σου φαγητό ή παιχνίδι; Ανακοινώνουν τα ερωτήματά τους στην τάξη και αποφασίζουν να ασχοληθούν με ένα ερώτημα που αφορά στα αγαπημένα τους χρώματα. Η συλλογή των δεδομένων για το συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, μπορούν να γράψουν όλοι οι μαθητές σε ένα κοινό χαρτί τα ονόματά τους και δίπλα να γράφουν το αγαπημένο τους χρώμα ή να ζωγραφίσει κάθε μαθητής σε ένα χαρτί το όνομά του και την απάντησή του. Συζητούν πώς θα ελέγξουν αν απάντησαν όλοι οι μαθητές και πώς θα οργανώσουν τα δεδομένα τους για να βρουν ποια είναι τα πιο αγαπημένα τους χρώματα. Ένας τρόπος είναι η καταμέτρηση με γραμμές, δηλαδή να καταγράψουν όλα τα χρώματα που αναφέρθηκαν και να φτιάξουν ένα πίνακα, όπως φαίνεται στο έργο (δίπλα σε κάθε χρώμα βάζουν μία γραμμή για κάθε παιδί). Ωστόσο, μπορούν να οργανώσουν τα δεδομένα τους και με άλλους τρόπους, όπως να τοποθετήσουν σε σωρούς τις ζωγραφιές τους με τα χρώματα για να τις μετρήσουν. Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός μπορεί να έχει έτοιμα τετραγωνισμένα χαρτιά και να δώσει από ένα σε κάθε ομάδα παιδιών για να κατασκευάσουν ένα ραβδόγραμμα. Το ραβδόγραμμα που θα προκύψει θα είναι, για παράδειγμα, όπως τα παρακάτω:

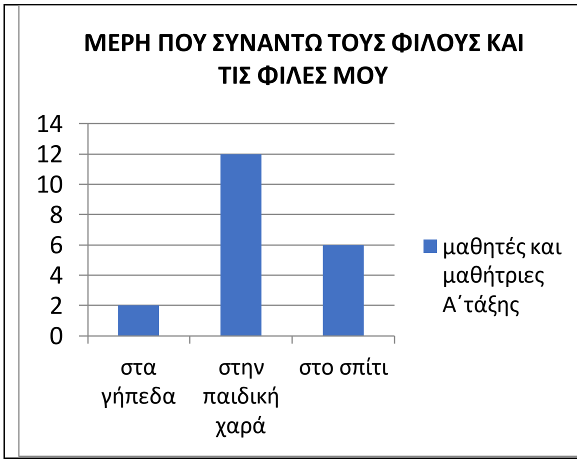


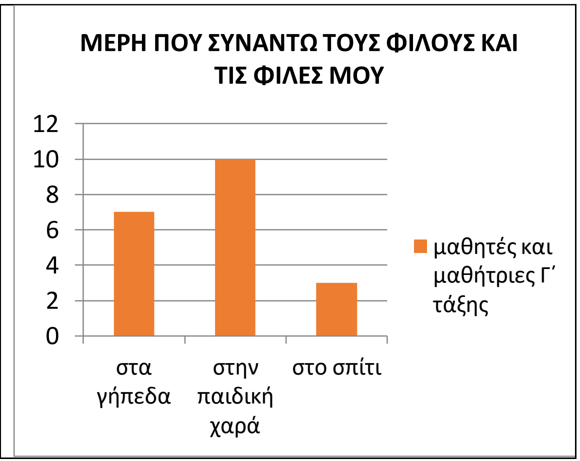

Με αφορμή το ραβδόγραμμα συζητούν διάφορα ερωτήματα για τα δεδομένα της τάξης τους, όπως: Ποιο χρώμα προτιμούν τα περισσότερα παιδιά της τάξης; Πόσα περισσότερα παιδιά προτιμούν το κόκκινο σε σχέση με το κίτρινο; Έχει σημασία να καταλήξουν σε μια απόφαση για το χρώμα ή τα χρώματα με τα οποία θα στολίσουν την τάξη τους. Επίσης, η τελευταία ερώτηση δίνει την ευκαιρία στα παιδιά να συζητήσουν για τη μεταβλητότητα των δεδομένων.

**<u>Γ΄ & Δ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου</u>**

**Έργο 2**: *Τα μέρη που συναντώ τους φίλους και τις φίλες μου*

Τα παιδιά μιας τετάρτης δημοτικού έκαναν μια έρευνα σε παιδιά της Πρώτης τάξης και της Τρίτης τάξης και έφτιαξαν τα παρακάτω διαγράμματα.




- Να γράψετε δύο προτάσεις για τις απαντήσεις των παιδιών της κάθε τάξης.
- Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές υπάρχουν στις απαντήσεις των παιδιών της Πρώτης και της Τρίτης τάξης;

***Χαρακτηριστικά έργου***

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στατιστική</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (εξήγηση, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Χαρακτ/στικά διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Επίλυση προβλήματος</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Διαχείριση δεδομένων</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Συλλογισμός και επιχειρηματολογία</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Μαθηματική επικοινωνία</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Κοινωνία</td><td></td><td></td></tr>
</table>

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης*: Οι μαθητές σε ομάδες ή ατομικά γράφουν προτάσεις ερμηνεύοντας τα δεδομένα του διαγράμματος που αναφέρονται σε μια έρευνα που αφορά δύο μικρούς πληθυσμούς. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να καταγράψουν με το δικό τους τρόπο τις πληροφορίες βασιζόμενοι στα δεδομένα και να τις συζητήσουν στην τάξη. Στη συνέχεια συζητούν για τις ομοιότητες και τις διαφορές που υπάρχουν στις δύο ομάδες, προκειμένου να εξάγουν απλά συμπεράσματα για τις συνήθειες των παιδιών της Πρώτης και της Τρίτης τάξης. Είναι σημαντικό να δοθεί η ευκαιρία στα παιδιά να προσπαθήσουν να ερμηνεύσουν τις διαφορές που υπάρχουν στις απαντήσεις των παιδιών ανάμεσα στις δύο τάξεις, καθώς και να εκτιμήσουν αν τα αποτελέσματα θα ήταν τα ίδια σε μια άλλη ομάδα παιδιών μεγαλύτερης τάξης.

**Ε΄ & Στ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου**

**Έργο 3:** *Άλμα σε μήκος*

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα άλματα σε μήκος των παιδιών μιας Ε΄ τάξης, σε εκατοστά.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 182 | 150 | 154 | 171 | 188 |
| 175 | 186 | 157 | 161 | 156 |
| 156 | 175 | 161 | 175 | 166 |
| 159 | 159 | 191 | 162 | 153 |
| 174 | 166 | 163 | 164 | 175 |

- Επειδή υπάρχουν πολλές διαφορετικές τιμές, να οργανώσετε τα δεδομένα σε ομάδες για να τα συζητήσετε. Ποιες ομάδες μπορείτε να φτιάξετε;
- Το παρακάτω φυλλόγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα του πίνακα με τον ακόλουθο τρόπο:

α) Διατάσσουμε τις τιμές από την μικρότερη στη μεγαλύτερη. Ποια είναι η μικρότερη τιμή; Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή;

β) Φτιάχνουμε 2 στήλες. Στην αριστερή στήλη γράφουμε τον αριθμό των δεκάδων και στην δεξιά στήλη τον αριθμό των μονάδων

| | |
|---|---|
| 15 | 0 3 4 6 6 7 9 9 |
| 16 | 1 1 2 3 4 6 |
| 17 | 1 |
| 18 | |
| 19 | |

- Να συνεχίσετε την κατασκευή του φυλλογράμματος.
- Σε ποια ομάδα δεδομένων υπάρχουν περισσότερες τιμές;
- Ποια είναι η επικρατούσα τιμή;
- Ποια είναι η διάμεσος;

***Χαρακτηριστικά έργου***

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στατιστική</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Μετασχημα-τιστικές δράσεις (οργάνωση, αναπαρά-σταση)</td><td rowspan="3">Χαρακτ/στικά διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Διαχείριση δεδομένων</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες &</td><td>Οπτικοποίηση</td><td>Γενικά</td><td>Μαθηματική επικοινωνία</td><td>Προτεινόμε</td><td></td></tr>
</table>

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***πρακτικές*** | | | | ***νοι πόροι*** | |
| ***Κοινωνικο-πολιτισμικέ ς πρακτικές*** | Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώ-ντας τα μαθηματικά | ***Συγκεί-μενο*** | Κοινωνία | | |

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης*: Αρχικά τα παιδιά συζητούν με ποιους τρόπους μπορούν να οργανώσουν τα δεδομένα τους σε ομάδες. Η απάντηση σε αυτό τα ερώτημα είναι αναγκαία λόγω της φύσης των ποσοτικών δεδομένων, καθώς όπως φαίνεται στον πίνακα υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία δεδομένων που κυμαίνονται από την τιμή 150 μέχρι την τιμή 191. Στην περίπτωση αυτή η οργάνωση των δεδομένων σε ομάδες βοηθά στην καλύτερη παρουσίαση και κατανόηση των δεδομένων που έχουν συλλεχθεί. Το φυλόγραμμα επιτρέπει την καταγραφή δεδομένων με αυτά τα χαρακτηριστικά σε ομάδες, ενώ η κατασκευή ενός σημειογράμματος θα ήταν δύσκολο να συμπεριλάβει τόσες πολλές διαφορετικές τιμές για την αναπαράσταση των δεδομένων. Στο φυλόγραμμα υπάρχουν δύο στήλες, που ονομάζονται συνήθως αντίστοιχα στέλεχος (η στήλη αριστερά από την κάθετη γραμμή) και φύλλα (η στήλη δεξιά από την κάθετη γραμμή). Για την κατασκευή του οι τιμές διατάσσονται από την μικρότερη στη μεγαλύτερη. Στην πρώτη στήλη καταγράφονται οι δεκάδες των τιμών των ποσοτικών δεδομένων και στη δεύτερη στήλη οι μονάδες. Το φυλόγραμμα που θα κατασκευαστεί στο προτεινόμενο πρόβλημα είναι το ακόλουθο:

| | |
|---|---|
| *15* | *0 3 4 6 6 7 9 9* |
| *16* | *1 1 2 3 4 6 6* |
| *17* | *1 4 5 5 5 5* |
| *18* | *2 6 8* |
| *19* | *1* |

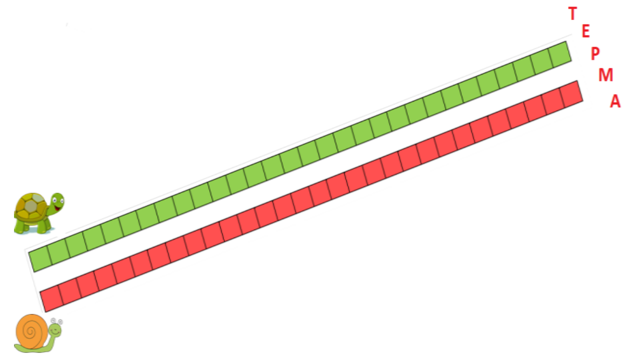
Στη συνέχεια τα παιδιά μπορούν να συζητήσουν με τη βοήθεια του φυλλογράμματος διάφορες πληροφορίες που σχετίζονται με τα ύψη των παιδιών, όπως σε ποια ομάδα δεδομένων υπάρχουν περισσότερες ή λιγότερες τιμές; Επίσης, μπορούν να υπολογίσουν τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν μάθει από προηγούμενες τάξεις επεκτείνοντας τις γνώσεις τους και στα φυλλογράμματα.

**(β) Πιθανότητες**: Στις Πιθανότητες παρουσιάζονται τρία ενδεικτικά παραδείγματα έργων. Τα δύο πρώτα εντάσσονται στην υποενότητα «*πιθανότητες ενδεχομένων*» σε διαφορετικές τάξεις και το τρίτο στην υποενότητα «*δειγματικοί χώροι*».

**<u>Α΄ & Β΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου</u>**

**Έργο 1:** Παιχνίδι

Έχετε δύο ζάρια, το ένα ζάρι έχει στις πλευρές του τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 και το άλλο τους αριθμούς 4,5,6 από δύο φορές τον καθένα. Να χωριστείτε σε δύο ομάδες. Η μία ομάδα παίζει με το ένα ζάρι με τη χελώνα-πιόνι στην πράσινη διαδρομή και η άλλη ομάδα με το άλλο ζάρι με το σαλιγκάρι-πιόνι στην κόκκινη διαδρομή. Κάθε διαδρομή περιλαμβάνει 30 βήματα. Κάθε ομάδα ρίχνει μια φορά το ζάρι και προχωρά τα αντίστοιχα βήματα πάνω στην διαδρομή. Νικήτρια είναι η ομάδα που θα φτάσει πρώτη στο τέρμα. Είναι δίκαιο το παιχνίδι;. Πώς μπορεί να γίνει δίκαιο το παιχνίδι;




***Χαρακτηριστικά έργου***

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Πιθανότητες</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (πρόβλεψη, μοντελοποί-ηση)</td><td rowspan="4">Χαρακτηριστικ ά διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Διερευνητική</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Πειράματα τύχης και πιθανότητες</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Συλλογισμός & επιχειρηματολογί α</td><td rowspan="2">Γενικά</td><td rowspan="2">Τα μαθηματικά ως εργαλείο ανάπτυξης ισχύος</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να αναπτύξουν και να ασκήσουν δεξιότητες που υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων</td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td>Χειραπτικά υλικά</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Κοινωνία</td><td></td><td></td></tr>
</table>

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης*: Οι μαθητές εμπλέκονται σε ένα παιχνίδι που τους επιτρέπει να προβληματιστούν για όλα τα δυνατά αποτελέσματα των δύο διαφορετικών ζαριών και τη σχέση αυτών των αποτελεσμάτων με την έκβαση του παιχνιδιού. Ο εκπαιδευτικός εμπλέκει ενεργά τα παιδιά στην πραγματοποίηση του παιχνιδιού. Είναι σημαντικό οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία: α) να εκφράσουν και να αιτιολογήσουν τις αρχικές τους προβλέψεις για τη νικήτρια ομάδα πριν παίξουν το παιχνίδι, β) να παίξουν το παιχνίδι και γ) να αξιολογήσουν τη διαφορά ανάμεσα στις προβλέψεις τους και τα αποτελέσματα που προκύπτουν μετά την πραγματοποίησή του. Τα παιδιά χρειάζεται να επιχειρηματολογήσουν για το αποτέλεσμα του παιχνιδιού προκειμένου να οδηγηθούν σε ένα συμπέρασμα σχετικά με το αν το παιχνίδι είναι δίκαιο. Η ερώτηση αυτή βοηθά τα παιδιά να επιχειρηματολογήσουν για το τι σημαίνει δίκαιο παιχνίδι (αν δίνει τις ίδιες ευκαιρίες στις ομάδες να νικήσουν). Το ερώτημα «Πώς μπορεί το παιχνίδι να γίνει δίκαιο;» μπορεί να απαντηθεί με πολλούς τρόπους, όπως να επιλέξουν και οι δύο ομάδες το ένα από τα δύο ζάρια ή να κατασκευαστεί ένα άλλο ζάρι. Τα παιδιά μπορούν να κατανοήσουν ότι τα αποτελέσματα σε ένα παιχνίδι τύχης επηρεάζονται από τις συνθήκες πραγματοποίησής του. Σε άλλο παιχνίδι μπορεί να χρησιμοποιηθούν τροχοί με 3 ή περισσότερα διαφορετικά χρώματα.

**<u>Γ΄ & Δ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου</u>**

**Έργο 2**: *Μαντεύω τους βόλους στο κουτί*

Τα παρακάτω κουτιά περιέχουν 10 βόλους το καθένα.


Κάθε κουτί περιέχει άσπρους και κόκκινους βόλους. Σε κάποιο από τα δυο κουτιά υπάρχουν 5 άσπροι και 5 κόκκινοι βόλοι και στο άλλο υπάρχουν 2 άσπροι και 8 κόκκινοι βόλοι. Να χωριστείτε σε δύο ομάδες. Κάθε παιδί της ομάδας τραβάει με κλειστά μάτια ένα βόλο από κάθε κουτί και ξαναβάζει το βόλο στο κουτί. Κάθε ομάδα επαναλαμβάνει 10 φορές και καταγράφει τα αποτελέσματα σε έναν πίνακα. Ποιο κουτί έχει 5 κόκκινους και 5 άσπρους βόλους με βάση τα αποτελέσματα των δοκιμών;

***Χαρακτηριστικά έργου***

| ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ | | ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ | | ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Πεδίο*** | Πιθανότητες | ***Ειδικά*** | Επίλυση προβλήματος (πρόβλεψη, εξήγηση) | ***Χαρακτηριστικά διδακτικής προσέγγισης*** | Διερευνητική |
| ***Ενότητα*** | Πειράματα τύχης και πιθανότητες | | | | |
| ***Μεγάλες Ιδέες*** | Μαθηματική δομή | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές*** | Συλλογισμός & επιχειρηματολογία | ***Γενικά*** | Τα μαθηματικά ως συλλογικό προϊόν ανθρώπινης δράσης | ***Προτεινόμενοι πόροι*** | Χειραπτικά υλικά |
| ***Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές*** | Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση | ***Συγκείμενο*** | Προσωπικό | | |

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης*: Η δραστηριότητα επιτρέπει στους μαθητές να προβλέψουν, με βάση τα αποτελέσματα πολλών δοκιμών ενός πειράματος τύχης, το διαφορετικό αριθμό από βόλους που υπάρχει σε κάθε κουτί. Κάθε ομάδα επαναλαμβάνει 10 φορές το πείραμα και καταγράφει τα αποτελέσματα της κάθε δοκιμής σε έναν πίνακα, όπως τον παρακάτω

| Δοκιμή | Κουτί Α | Κουτί Β |
|---|---|---|
| 1η | | |
| 2η | | |
| 3η | | |
| 4η | | |
| 5η | | |
| 6η | | |
| 7η | | |
| 8η | | |
| 9η | | |
| 10η | | |

Στη συνέχεια, η κάθε ομάδα μαθητών θα κάνει μια πρόβλεψη για να βρει το κουτί που περιέχει 5 κόκκινους και 5 άσπρους βόλους. Για να απαντήσει μπορεί να αντιστοιχίσει το κουτί με αυτό για το οποίο τα αποτελέσματα που θα έχουν προκύψει έχουν περίπου τον ίδιο αριθμό βόλων των δύο χρωμάτων. Ωστόσο, υπάρχει πάντα η περίπτωση τα εμπειρικά αποτελέσματα που θα προκύψουν από τις 10 δοκιμές να μην συμφωνούν πάντα με το σωστό κουτί. Γι αυτό το λόγο, είναι σημαντικό να συγκεντρωθούν τα αποτελέσματα των δοκιμών όλων των ομάδων στο τέλος και να ξανακάνουν οι μαθητές προβλέψεις, καθώς ο αυξανόμενος αριθμός των δοκιμών οδηγεί σε ασφαλέστερες προβλέψεις.

| Αριθμός δοκιμών | Συχνότητα για κόκκινο χρώμα<br>Α ΚΟΥΤΙ | Συχνότητα για κόκκινο χρώμα<br>Β ΚΟΥΤΙ |
|---|---|---|
| 10 | | |
| 20 | | |
| 30 | | |
| | | |

**<u>Ε΄ & Στ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου</u>**

**Έργο 3**: Επιτραπέζια παιχνίδια με δυο ζάρια, ποιος κερδίζει;

- Έχετε ένα κόκκινο ζάρι και ένα μπλε ζάρι. Να χωριστείτε σε ομάδες. Κάθε ομάδα ρίχνει τα δύο ζάρια 10 φορές και καταγράφει τα αποτελέσματα που προκύπτουν σε 2 στήλες (μία στήλη για κάθε ζάρι).
- Καταγράφετε στην τάξη συνολικά τα διαφορετικά αποτελέσματα που βρήκατε όλες οι ομάδες και ελέγχετε αν υπάρχουν και άλλα αποτελέσματα.
- Όταν ρίχνετε τα δύο ζάρια, ποιο άθροισμα έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να τύχει; Γιατί;

***Χαρακτηριστικά έργου***

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Πιθανότητες</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Μετασχηματι-στικές δράσεις (οργάνωση, αναπαράσταση)</td><td rowspan="4">Χαρακτη-ριστικά διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Διερευνητική</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Πειράματα τύχης και πιθανότητες</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Μαθηματική επικοινωνία</td><td rowspan="2">Γενικά</td><td rowspan="2">Μαθηματική επικοινωνία</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά</td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td>Χειραπτικά υλικά</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Κοινωνία</td><td></td><td></td></tr>
</table>

*Οδηγίες διδακτικής διαχείρισης*: Η δραστηριότητα εισάγει τους μαθητές στην περιγραφή όλων των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης δύο σταδίων. Οι μαθητές σε ομάδες έχουν δύο ζάρια με τους αριθμούς 1-6 σε διαφορετικά χρώματα (κόκκινο ζάρι και μπλε ζάρι). Κάθε ομάδα ρίχνει τα δύο ζάρια 10 φορές και καταγράφει τα αποτελέσματα που προκύπτουν σε 2 στήλες (μία στήλη για κάθε ζάρι).

| δοκιμή | κόκκινο ζάρι | μπλε ζάρι | άθροισμα |
|---|---|---|---|
| $1^{η}$ | | | |
| $2^{η}$ | | | |
| $3^{η}$ | | | |
| $4^{η}$ | | | |
| $5^{η}$ | | | |
| $6^{η}$ | | | |
| $7^{η}$ | | | |
| $8^{η}$ | | | |
| $9^{η}$ | | | |
| $10^{η}$ | | | |

Στη συνέχεια καταγράφουν συνολικά σε ένα πίνακα συχνοτήτων τα διαφορετικά αποτελέσματα που έχουν βρει όλες οι ομάδες για κάθε άθροισμα και ελέγχουν αν υπάρχουν και άλλα αθροίσματα που δεν έχουν καταγραφεί. Επίσης τα παιδιά μπορεί να κατασκευάσουν και ένα σημειόγραμμα με τα αποτελέσματα της ρίψης των δύο ζαριών.

Η καταγραφή των αθροισμάτων μπορεί να καταλήξει σε ένα πίνακα, όπως φαίνεται παρακάτω:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 6+1 | | | | | |
| | | | | | 5+1 | 5+2 | 6+2 | | | | |
| | | | | 4+1 | 4+2 | 4+3 | 5+3 | 6+3 | | | |
| | | | 3+1 | 3+2 | 3+3 | 3+4 | 4+4 | 5+4 | 6+4 | | |
| | | 2+1 | 2+2 | 2+3 | 2+4 | 2+5 | 3+5 | 4+5 | 5+5 | 6+5 | |
| | 1+1 | 1+2 | 1+3 | 1+4 | 1+5 | 1+6 | 2+6 | 3+6 | 4+6 | 5+6 | 6+6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Με αφορμή τον πίνακα η συζήτηση μπορεί να αφορά θέματα όπως: το πλήθος όλων των δυνατών ενδεχομένων, ποιο ενδεχόμενο είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό να εμφανιστεί και γιατί, τον υπολογισμό της πιθανότητας του κάθε ενδεχομένου κ.λπ.

### 3.5 Ενδεικτικό Παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες

**(α) Στατιστική:** Στην ενότητα αυτή δίνεται ένα παράδειγμα για την εξέλιξη των ΠΜΑ στην υποενότητα «διατύπωση ερωτημάτων», της ενότητας «διαχείριση δεδομένων», που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία όλων των τάξεων τα ΠΜΑ.

Οι μαθητές συζητούν για τους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες και πραγματοποιούν μια έρευνα με αφορμή ερωτήματα όπως:

— *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα:* Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των μαθητών της τάξης τους; (Α΄ Δημοτικού)

— *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά δεδομένα:* Πόσες μπάλες ομαδικών αθλημάτων (π.χ. μπάσκετ, ποδοσφαίρου κλπ.) έχουν στο σπίτι τους; (Β΄ Δημοτικού)

— *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά ή κατηγορικά δεδομένα:* Πόσες χώρες κέρδισαν χάλκινα, ασημένια, χρυσά μετάλλια στους τελευταίους Ολυμπιακούς αγώνες; (Γ΄ Δημοτικού)

— *Ερωτήματα που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους:* Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των κοριτσιών και των αγοριών της τάξης τους; (Δ΄ Δημοτικού)

— *Ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα τα οποία ομαδοποιούνται*: Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της τάξης τους σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (Ε΄ Δημοτικού)

— *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνδυασμό διακριτών ποσοτικών και κατηγορικών δεδομένων:* Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της Γ΄ Δημοτικού και της ΣΤ΄ Δημοτικού σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (ΣΤ΄ Δημοτικού)

— *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους:* Ποιες ήταν οι επιδόσεις των μαθητών της τάξης τους στο αγώνισμα του μήκους; (Α’ Γυμνασίου)

— *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα:* Πόσες χώρες έλαβαν μέρος στους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες (1896-σήμερα) και πόσες κέρδισαν μετάλλια; (Β΄ Γυμνασίου)

— *Ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους:* Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων; (Γ΄ Γυμνασίου)

— *Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού:* Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων αγοριών και κοριτσιών αθλητών/τριών στο αγώνισμα του μήκους; (Α΄ Λυκείου)

— *Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:* Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων αγοριών και κοριτσιών; (Β’ Λυκείου)

— *Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:* Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων στο αγώνισμα του μήκους και στο τριπλούν; (Γ’ Λυκείου)

(β) Πιθανότητες: Δίνουμε παρακάτω ένα παράδειγμα που αναδεικνύει την εξέλιξη των ΠΜΑ στις διάφορες βαθμίδες και τάξεις στην υποενότητα «Πιθανότητες ενδεχομένων» της ενότητας «Πειράματα τύχης και πιθανότητες».

Οι μαθητές πειραματίζονται με έναν κύβο ο οποίος έχει τρεις κόκκινες, δύο κίτρινες και μία πράσινη έδρα. Μπορούμε π.χ. να βάψουμε κόκκινες τις έδρες ενός ζαριού με ένδειξη 1-3, κίτρινες τις έδρες με ένδειξη 4-5 και πράσινη την έδρα με ένδειξη 6.

— *Περιγράφουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, αδύνατο*: Στην Α’ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ότι το να φέρουν κόκκινο είναι πιθανό αλλά όχι βέβαιο, ενώ το να φέρουν μπλε είναι αδύνατο.

— *Συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους:* Στη Β’ Δημοτικού μπορούν να απαντήσουν ότι το να φέρουν κόκκινο είναι πιο πιθανό από το να φέρουν πράσινο.

— *Συγκρίνουν τις πιθανότητες εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές*: Στη Γ’ Δημοτικού οι μαθητές επιβεβαιώνουν με πειράματα ότι η κόκκινη έδρα εμφανίζεται πιο συχνά, αν επαναλάβουμε το ρίξιμο του κύβου αρκετές φορές.

— *Εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με εύρος από αδύνατο ενδεχόμενο έως βέβαιο ενδεχόμενο:* Στη Δ’ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να τοποθετήσουν σε μια κλίμακα με εύρος από το αδύνατο ως το βέβαιο τις πιθανότητες να έρθει κόκκινο, κίτρινο ή πράσινο.

— *Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων) / (πλήθος δυνατών περιπτώσεων) και την αναπαριστούν σε κλίμακα από 0 έως 1:* Στην Ε’ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ότι η πιθανότητα να φέρουν κίτρινο είναι 2/6=1/3.

— *Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα και τη συγκρίνουν με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης:* Στη ΣΤ’ Δημοτικού οι μαθητές διαπιστώνουν ότι αν ρίξουν πολλές φορές έναν τέτοιο κύβο οι σχετικές συχνότητες εμφάνισης της κόκκινης, κίτρινης και πράσινης έδρας είναι συγκρίσιμες με το 3/6, 2/6 και 1/6 αντίστοιχα.

— *Χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου:* Στην Α’ Γυμνασίου οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα να φέρουν δύο φορές κίτρινο αν ρίξουν δύο τέτοιους κύβους (4 από τα 36 αποτελέσματα είναι ευνοϊκά) αλλά και την πιθανότητα να φέρουν ίδιο χρώμα (14 από τα 36 αποτελέσματα είναι ευνοϊκά).

— *Χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων:* Στη Β’ Γυμνασίου μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα τα δυο ζάρια να φέρουν το ίδιο χρώμα προσθέτοντας τις πιθανότητες να φέρουν δύο κόκκινες, δύο κίτρινες και δύο πράσινες ενδείξεις (9/36+4/36+1/36).

— *Αναγνωρίζουν μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας π.τ., ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών):* Στη Γ’ Γυμνασίου οι μαθητές μπορούν είτε να εκτελέσουν είτε να προσομοιώσουν με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων έναν μεγάλο αριθμό τέτοιων πειραμάτων και να δουν ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης 2 εδρών ίδιου χρώματος πλησιάζει μετά από πολλές επαναλήψεις το 14/36.

— *Περιγράφουν πειράματα τύχης και με μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα:* Στην Α' Λυκείου οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν το παραπάνω πείραμα σε έναν απλούστερο δειγματικό χώρο με 9 εκβάσεις (το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου {κόκκινο, κίτρινο, πράσινο} με τον εαυτό του), να αποδώσουν πιθανότητα σε αυτές τις εκβάσεις και να υπολογίσουν π.χ. την πιθανότητα τουλάχιστον μια έδρα να είναι κόκκινη χρησιμοποιώντας λογισμό πιθανοτήτων και όχι απαρίθμηση.

— *Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων:* Στη Β' Λυκείου οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν στο ερώτημα ποια είναι η πιθανότητα να φέρουν 4 διαφορετικά αποτελέσματα αν ρίξουν 4 φορές ένα ζάρι.

— *Αναγνωρίζουν τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τις κατανομές Bernoulli, διακριτή ομοιόμορφη και διωνυμική και υπολογίζουν τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας αυτών:* Στη Γ' Λυκείου οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα να φέρουν τουλάχιστον 5 φορές άρτια ένδειξη, αν ρίξουν 10 φορές ένα σύνηθες ζάρι, και να αναγνωρίσουν την αντιστοιχία αυτού του προβλήματος με το να απαντήσουν σωστά σε τουλάχιστον 5 από 10 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με 2 πιθανές απαντήσεις (Σωστό/Λάθος).

## 4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΕΙΔΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

### 4.1. ΠΕΔΙΟ Ι: ΑΡΙΘΜΟΣ, ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΝΑΛΥΣΗ

Δημητρακοπούλου, Σ., & Χρήστου, Κ. (2014). Πώς Ερμηνεύουν οι Μαθητές τα Γράμματα-Μεταβλητές & Πώς αυτά εμφανίζονται στα Σχολικά Βιβλία του Γυμνασίου; Στο *Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ "Τα Μαθηματικά στο Σχολείο και στη Καθημερινή Ζωή"*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Δραμαλίδης, Α. & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 12-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 11, 100-114.

Kaput, J. J. (2017). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (Eds) (2004). *The future of the teaching and learning of Algebra*. The 12th ICMI Study*, Melbourne, Australia*. Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education*. New York: Springer

Χρήστου, Κ. (2014). Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού στις Αριθμητικές Πράξεις. Στο *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ "Τα Μαθηματικά στο Σχολείο στην Καθημερινή Ζωή"*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

### 4.2. ΠΕΔΙΟ ΙΙ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΜΕΤΡΗΣΗ, ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Battista, Michael T. "The development of geometric and spatial thinking." *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* 2 (2007): 843-908.

Bragg, P., & Outhred, L. (2000). Students' knowledge of length units: do they know more than rules about rulers?. In *Psychology of Mathematics Education* (pp. 97-104). Program Committee.

Britton, J. (2001). *Investigating patterns: Symmetry and Tessellations*. Dale Seymour Publications.

Chambris, C., Dougherty, B., Subramaniam, K. R., Ruwisch, S., & Chung, I. (2017). Topic Study Group No. 9: Teaching and Learning of Measurement (Focus on Primary Education). In *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 415-419). Springer, Cham.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2020). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Curry, M., Mitchelmore, M., & Outhred, L. (2006). Development of children's understanding of length, area and volume measurement principles. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds*.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2006 Vol. 2, pp. 377-384. (16 - 21 July 2006 : Prague, Czech Republic)

De Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge University Press.

English, L. D. (2013). Analogies, metaphors, and images: Vehicles for mathematical reasoning. In *Mathematical Reasoning* (pp. 11-26). Routledge.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Freudenthal, H. (2012). *Mathematics as an educational task*. Springer Science & Business Media.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). *Research on the teaching and learning of geometry. In The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109-149). Brill Sense.

Koeno, G., Figueiredo, N., Feijs, E., Van Galen, F., Keijzer, R., & Munk, F. (2016). *Measurement and geometry in upper primary school*. Springer.

Mariotti, M. A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. *Handbook of international research in mathematics education*, 695-723.

McDonough, A. (2010). Foundational ideas of measure: Exploring length understandings. In M. M. F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME 34, v. 1* (Vol. volume 1, pp. 289 – 296). The International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 209-238.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Navigating through measurement in prekindergarten-grade 2*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newcombe, N. S., & Learmonth, A. E. (2005). Development of spatial competence, v Shah, P. & Miyake, A.(izd.), The Cambridge handbook of visuospatial thinking.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Ng, O. L., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM*, *47*(3), 421-434.

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for research in mathematics education*, *31*(2), 144-167.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2005). Young children learn measurement and geometry. TAL Project.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally (7th.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based guidance for ages 9-19*. OUP Oxford.

#### 4.3. ΠΕΔΙΟ III: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

English, L. D. (2005). Combinatorics and the Development of Children's Combinatorial Reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp.121–141). Dordrecht: Springer

English, L. (2012). Data modeling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, *81*, 15-30.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review,* 75 (3), 372–396.

Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice.* Springer Science & Business Media

Jones, G.A. & Langrall, W.C. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909- 956). NCTM

Jones, G.A., Langrall, W.C., Thornton, C.A., Mogill, A.T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics,* 32, 101-125.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Thornton, C.A. & Mogill, A.T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 5 ,487-519.

Franklin, C. & Mewborn, D. (2008). Statistics in the elementary grades: exploring distribution of data. *Teaching Children Mathematics*, 10-16.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report*. American Statistical Association.

Friel S., Bright G. and. Curcio F. (1997). Understanding students' understanding of graphs. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 224-226.

Konold, C., Higgins, T., Russell, S. & Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 305-325.

Oslington, G., Mulligan, J. & Bergen P.V. (2020). Third- graders' predictive reasoning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 5-24.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In. D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester(Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957- 1010). NCTM

Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics,* 96, 33-47. DOI 10.1007/s10649-017-9764-5

Wu, Y. (2004). Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs. Paper presented at the *Tenth International Congress on Mathematics Education* (ICME-10), Copenhagen, Denmark. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications